Lista 7 – Álgebra Linear – Turma NASA

2Q'22

Prof. Pedro Lauridsen Ribeiro

Sistemas lineares

Adotamos as seguntes abreviações: c.l. = "combinação linear"; l.d. = "linearmente dependente(s)"; l.i. = "linearmente independente(s)", t.l. = "transformação linear". Exercícios ou itens com (*) são mais trabalhosos.

Algoritmo de eliminação gaussiana

Dados espaços vetoriais (reais) V, W com $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, $\vec{b} \in W$ e uma t.l. $T : V \to W$, seja o sistema linear $T\vec{x} = \vec{b}$ na *forma matricial* $A\vec{x}_{S_1} = \vec{b}_{S_2}$, onde $S_1 = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\} \subset V$ e $S_2 = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m\} \subset W$ são bases e A é a matriz de T em S_1, S_2. Se $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ e $\vec{b} = \sum_{i=1}^m b_i \vec{f}_i$, então

$$\vec{x}_{S_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_{S_2} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad A = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}, \quad T\vec{e}_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} \vec{f}_i \ , j = 1, \ldots, n \ ,$$

ou seja, $A_{ij} = [A]_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ quaisquer. Seja

$$A' = \left[\begin{array}{ccc|c} A_{11} & \cdots & A_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} & b_m \end{array}\right] = \left[\ A \ \middle| \ \vec{b}_{S_2} \ \right]$$

a *matriz aumentada* do sistema $A\vec{x}_{S_1} = \vec{b}_{S_2}$.

(a) Tome $\boxed{i = j = 1}$;

(b) Se $\boxed{i \leq m}$ *e* $\boxed{j \leq n}$, execute os seguintes passos:

  (i) Se $\boxed{A_{ij} = 0}$, *permute*† a i-ésima linha da matriz *aumentada* A' com a i'-ésima linha de A', onde $\boxed{i' > i}$ é o menor índice para o qual $\boxed{A_{i'j} \neq 0}$. Se não houver tal i', *troque* j *por* $j + 1$ e repita o passo (i);

  (ii) Se $\boxed{A_{ij} \neq 0}$, *multiplique*† a i-ésima linha de A' por $\frac{1}{A_{ij}}$, de modo a tornar $\boxed{A_{ij} = 1}$, e depois *some*† $-A_{i'j}\times$(i-ésima linha) de A' à i'-ésima linha de A' para *cada* $\boxed{i' > i}$, de modo a tornar $\boxed{A_{i'j} = 0}$;

  (iii) *Troque* j *por* $j + 1$ e i *por* $i + 1$, e repita o passo (b);

(c) Se $\boxed{i > m}$ *ou* $\boxed{j > n}$, *encerre* o algoritmo.

Cada operação indicada com † representa a aplicação de uma *operação elementar* à esquerda dos *dois lados* do sistema linear $T\vec{x} = \vec{b}$, de modo a obter um novo sistema linear *equivalente* ao anterior (i.e. com as *mesmas* soluções) pois toda operação elementar é uma t.l. invertível. É por isso que cada operação elementar deve ser aplicada à matriz aumentada e não só ao lado esquerdo.

O resultado da eliminação gaussiana é a matriz aumentada

$$B' = \left[\begin{array}{ccc|c} B_{11} & \cdots & B_{1n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mn} & b'_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} B & \vec{b}'_{S_2} \end{array}\right],$$

cujo lado esquerdo B possui a seguinte característica: existem $0 \leq r \leq m$ e $0 = j_0 < j_1 < j_2 < \cdots j_r \leq n$ tais que (1) $B_{i'j'} = 0$ se $j' < j_i$ e $i' \geq i$; (2) $B_{ij_i} \neq 0$ e $B_{i'j_i} = 0$ se $i' > i$, (3) $B_{i'j} = 0$ se $i' > r$, $1 \leq j \leq n$ e (4) $B_{ij_i} = 1$, para todo $1 \leq i \leq r$. Em geral, se $B_{ij} \neq 0$ e $B_{ij'} = 0$ para todo $j' < j$, ou seja, B_{ij} é a primeira entrada não-nula da i-ésima linha, dizemos que B_{ij} é o *pivô* da i-ésima linha de A, e j é a *coluna* desse pivô. Logo, $j_1 < j_2 < \cdots j_r$ são as colunas dos pivôs de B. Uma matriz B com as propriedades (1)–(3) é dita *escalonada (em linhas)* (em inglês, *(row) echelon form*):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & B_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & B_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & B_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & B_{rj_r} & \cdots & B_{rn} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

No sistema linear correspondente $B\vec{x}_{S_1} = \vec{b}'_{S_2}$ (que, como apontado acima, possui as mesmas soluções que o sistema original), as equações que são identicamente zero do lado esquerdo (correspondendo às linhas nulas de B) são necessariamente as *últimas*. Além disso, as equações não-triviais (correspondendo às linhas não-nulas de B) são *l.i.*, i.e. não é possível obter uma das equações como c.l. das outras. O número r de *linhas (equações) não-nulas* de B é igual ao *posto* de A. O caso $r = 0$ só ocorre se $A = 0$.

Algoritmo de eliminação de Gauss-Jordan

Empregamos a mesma notação usada no algoritmo de eliminação gaussiana.

- (a') *Aplique eliminação gaussiana* a A', de modo a obter a matriz aumentada B' com lado esquerdo B escalonado. Sejam $j_1 < \cdots < j_r$ as colunas dos pivôs das linhas não-nulas de B;
- (b') Tome $\boxed{i = r}$;
- (c') Se $\boxed{i > 0}$, execute os seguintes passos:
  - (i) *Some*† $-B_{i'j_i} \times (i$-ésima linha) à i'-ésima linha para *cada* $\boxed{i' < i}$, de modo a tornar $\boxed{B_{i'j_i} = 0}$;
  - (ii) *Troque i por* $i - 1$ e repita o passo (c');
- (d') Se $\boxed{i = 0}$, *encerre* o algoritmo.

O lado esquerdo C da matriz aumentada $C' = [C|\vec{b}''_{S_2}]$ resultante do algoritmo de eliminação de Gauss-Jordan possui as mesmas propriedades resultantes da eliminação gaussiana – em particular, as posições dos pivôs das linhas de C são as mesmas de B. O objetivo é zerar todas as entradas *acima* de cada pivô, de modo a eliminar a necessidade de substituir as variáveis correspondentes às colunas dos pivôs que já foram resolvidas. Mais precisamente, os passos (b')–(d') do algoritmo de Gauss-Jordan são uma maneira mecânica e sistemática de executar essas substituições.

Critério para *existência* de soluções

O sistema original *possui* soluções se e somente se *não* houver equações com lado esquerdo *identicamente nulo* (correspondentes a linhas de A só com zeros) e lado direito *diferente de zero* após eliminação gaussiana ou de Gauss-Jordan. Em particular, se o sistema linear $T\vec{x} = \vec{b}$ for *homogêneo* (i.e. $\vec{b} = \vec{0}$), então ele *sempre* tem *pelo menos uma* solução (a saber, $\vec{x} = \vec{0}$).

Critério para *unicidade* de soluções

- $\boxed{r = n}$ (i.e. o número de equações *após* eliminação gaussiana é *igual* ao número de variáveis no sistema original): a solução, se existir, é *única*;
- $\boxed{r < n}$ (i.e. o número de equações *após* eliminação gaussiana é *menor* que o número de variáveis no sistema original): a solução, se existir, *não é única*.

Obtendo a solução geral no caso $\boxed{r < n}$ (solução não-única)

(i) Sejam $j_1 < \ldots < j_r$ as colunas dos *pivôs* das linhas não-nulas da matriz obtida após eliminação gaussiana ou de Gauss-Jordan, e $j_{r+1} < \ldots < j_n$ as $n - r$ colunas restantes, i.e. $\{j_{r+1}, \ldots, j_m\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$;

(ii) Se o sistema original possui solução, uma solução *particular* $\boxed{\vec{x}_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j}$ dele é obtida tomando-se $\boxed{x_j = 0}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$ no sistema obtido após eliminação gaussiana ou de Gauss-Jordan;

(iii) Considere o sistema linear *homogêneo* $\boxed{A\vec{z}_{S_1} = \vec{0}_{S_2}}$ associado ao sistema linear original $A\vec{x}_{S_1} = \vec{b}_{S_2}$. Para obter os sistemas resultantes após eliminação gaussiana ou de Gauss-Jordan, basta *zerar o lado direito* das matrizes aumentadas correspondentes. Como $\boxed{r < n}$, esse sistema admite soluções não-triviais $\boxed{\vec{z} \neq \vec{0}}$;

(iv) Para cada $k = 1, \ldots, n-r$, obtém-se uma solução $\boxed{\vec{z}_k = \sum_{j=1}^{n} z_{kj} \vec{e}_j}$ do sistema linear homogêneo tomando-se $\boxed{z_{kj_{r+k}} = 1}$ e $\boxed{z_{kj_{r+k'}} = 0}$ se $\boxed{k' \neq k}$ no sistema obtido após eliminação gaussiana ou de Gauss-Jordan. Por construção, as soluções $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-r}$ são l.i. e portanto (pelo Teorema do Núcleo e da Imagem) formam uma base do espaço de soluções;

(v) Portanto, pelo Princípio de Superposição, a solução *geral* do sistema *homogêneo* é dada por $\boxed{\vec{z} = \sum_{k=1}^{n-r} x_{j_{r+k}} \vec{z}_k}$, $x_{j_{r+k}} \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n - r$, e a solução *geral* do sistema *original* é dada por $\boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{z}}$.

---

1 Considere as seguintes matrizes aumentadas, sobre as quais *já foi aplicada* eliminação de Gauss-Jordan.

(i) Escreva o sistema linear correspondente.

(ii) Se o número de equações linearmente independentes for igual ao número de variáveis, resolva o sistema linear obtido, se possível.

(iii) Se o número de equações linearmente independentes for menor que o número de variáveis, encontre uma solução particular para o sistema (se houver), e encontre uma base para o espaço de soluções do sistema homogêneo correspondente.

a.) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$;

b.) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right]$;

c.) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$;

d.) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$;

e.) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$;

f.) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$;

g.) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$;

h.) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

2 Considere os seguintes sistemas lineares não-homogêneos. Para cada um deles:

(i) Escreva a matriz aumentada;

(ii) Obtenha a matriz aumentada resultante após eliminação gaussiana e daí o número r de equações linearmente independentes do sistema;

(iii) Obtenha a matriz aumentada resultante após eliminação de Gauss-Jordan;

(iv) Determine quais sistemas tem solução, e para quais a solução é única;

(v) Resolva os sistemas que possuem uma única solução, de duas formas diferentes: a primeira usando o sistema obtido após eliminação gaussiana, e a segunda usando o sistema obtido após eliminação de Gauss-Jordan.

a.) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$;

b.) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$;

c.) $\begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases}$;

d.) $\begin{cases} -2b + 3c = 1 \\ 3a + 6b - 3c = -2 \\ 6a + 6b + 3c = 5 \end{cases}$;

e.) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$;

f.) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 30 \end{cases}$;

g.) $\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 = 12 \\ 3x_1 - 6x_2 = 9 \\ -2x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases}$;

h.) $\begin{cases} \phantom{x+{}} 10y - 4z + w = 1 \\ x + 4y - z + w = 2 \\ 3x + 2y + z + 2w = 5 \\ -2x - 8y + 2z - 2w = -4 \\ x - 6y + 3z = 1 \end{cases}$;

i.) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$;

j.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{cases}$;

k.) $\begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ x - y = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 7 \end{cases}$.

3 Por simples inspeção (isto é, *sem resolver o sistema*), determine quais dos sistemas lineares homogêneos abaixo possuem soluções não-triviais (isto é, diferentes de zero), dando a razão para tal:

a.) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$;

b.) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 8x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases}$;

c.) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$;

d.) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$.

4 Resolva os sistemas lineares homogêneos abaixo por eliminação gaussiana. Se o sistema admitir uma solução não-trivial, encontre uma base do espaço de soluções:

a.) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$;

b.) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$;

c.) $\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ w - y - 3z = 0 \\ 2w + 3x + y + z = 0 \\ -2w + x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$;

d.) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$;

e.) $\begin{cases} v + 3w - 2x = 0 \\ 2u + v - 4w + 3x = 0 \\ 2u + 3v + 2w - x = 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x = 0 \end{cases}$;

f.) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

5 Resolva os sistemas lineares não-homogêneos abaixo (a, b, c são constantes fixas) por eliminação gaussiana.

a.) $\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x + 6y = b \end{cases}$;

b.) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 2x_3 = b \\ 3x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$.

6 Para quais valores de λ os sistemas lineares abaixo possuem:

(i) Uma única solução?

(ii) Nenhuma solução?

(iii) Mais de uma solução?

a.) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (\lambda^2 - 14)z = \lambda + 2 \end{cases}$;

b.) $\begin{cases} (\lambda - 3)x + y = 0 \\ x + (\lambda - 3)y = 0 \end{cases}$.

7 Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = \lambda x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

por eliminação gaussiana nos casos (i) $\lambda = 1$ e (ii) $\lambda = 2$.

8 Sejam as transformações lineares $T : V = \mathbb{R}^n \to W = \mathbb{R}^m$ dadas nas respectivas bases canônicas pelas matrizes $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ listadas abaixo.

(i)Aplique eliminação de Gauss-Jordan a A;

(ii)Use o item anterior para determinar o *posto* $R(T)$ de T (= $\dim(T(V))$ = número de linhas não-nulas de A após eliminação gaussiana ou de Gauss-Jordan) e a *nulidade* $N(T)$ de T (= $\dim(\ker(T))$ = (número de colunas de A) − (posto de T));

(iii)Encontre uma base para $\ker(T)$ nos casos em que $\dim(\ker(T)) > 0$, lembrando que esse subespaço vetorial de V *é* o espaço das soluções do sistema linear homogêneo $T\vec{x} = \vec{0}$.

a.) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$;

b.) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

c.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

d.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$;

e.) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$.

9 Sejam os conjuntos $S = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n\}$ de n vetores em $\mathbb{R}^4$ dados abaixo. Determine por simples inspeção dos vetores em S um subconjunto de S que seja uma base do subespaço vetorial $L(S)$ gerado por S, e determine as componentes dos vetores restantes em S nessa base.

a.) $S = \{\vec{y}_1 = (1, 0, 1, 1), \vec{y}_2 = (-3, 3, 7, 1), \vec{y}_3 = (-1, 3, 9, 3), \vec{y}_4 = (-5, 3, 5, -1)\}$;

b.) $S = \{\vec{y}_1 = (1, -2, 0, 3), \vec{y}_2 = (2, -4, 0, 6), \vec{y}_3 = (-1, 1, 2, 0), \vec{y}_4 = (0, -1, 2, 3)\}$.

10 Sejam os conjuntos $S = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n\}$ de n vetores em $\mathbb{R}^4$ dados abaixo.

(i)Determine o sistema linear homogêneo com n variáveis $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dado por $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{y}_j = 0$ e escreva a matriz aumentada correspondente;

(ii)Aplique eliminação de Gauss-Jordan ao sistema linear homogêneo obtido no item (i);

(iii)Determine a dimensão k do espaço de soluções do sistema linear homogêneo obtido no item (i) e encontre uma base de soluções para esse sistema se $k > 0$;

(iv)Seja o sistema reduzido após eliminação de Gauss-Jordan (i.e. retirando as linhas só com zeros). Nos casos em que $k > 0$, obtenha as soluções dos $n - k$ sistemas lineares não-homogêneos obtidos tomando-se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ no sistema reduzido e tomando o lado direito da matriz aumentada do sistema obtido pelos vetores-coluna com a j-ésima entrada igual a 1 e todas as outras iguais a zero, $j = 1, \ldots, n - k$.

(v)Use o resultado dos itens (iii) e (iv) para escrever uma base para o subespaço vetorial gerado por S. Qual a dimensão desse subespaço?

a.) $S = \{\vec{y}_1 = (1, 1, -4, -3), \vec{y}_2 = (2, 0, 2, -2), \vec{y}_3 = (2, -1, 3, 2)\}$;

b.) $S = \{\vec{y}_1 = (-1, 1, -2, 0), \vec{y}_2 = (3, 3, 6, 0), \vec{y}_3 = (9, 0, 0, 3)\}$;

c.) $S = \{\vec{y}_1 = (1,1,0,0), \vec{y}_2 = (0,0,1,1), \vec{y}_3 = (-2,0,2,2), \vec{y}_4 = (0,-3,0,3,)\}$;

d.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

11 Que condições $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ devem satisfazer para que o sistema linear

$$\begin{cases} x - 3y = \lambda_1 \\ x - 2y = \lambda_2 \\ x + y = \lambda_3 \\ x - 4y = \lambda_4 \\ x + 5y = \lambda_5 \end{cases}$$

tenha solução?

12 Determine o posto das matrizes A dadas abaixo como função de $t \in \mathbb{R}$:

a.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

b.) $A = \begin{bmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{bmatrix}$.

13 Calcule a inversa das matrizes A abaixo (*se houver*) por meio de eliminação de Gauss-Jordan. Nos casos em que não houver inversa, determine a nulidade e uma base para o núcleo da transformação linear correspondente a A.

a.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

b.) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$;

c.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

Respostas parciais dos exercícios

1 a.) A única solução é dada por $\vec{x} = (3, 0, 7)$;

b.) Uma solução particular do sistema é dada por $\vec{x}_0 = (8, 2, -5, 0)$, e uma base do espaço de soluções do sistema homogêneo correspondente é dada por $\{\vec{z}_1 = (7, -3, -1, 1)\}$;

c.) Uma solução particular do sistema é dada por $\vec{x}_0 = (-2, 0, 7, 8, 0)$, e uma base do espaço de soluções do sistema homogêneo correspondente é dada por $\{\vec{z}_1 = (6, 1, 0, 0, 0), \vec{z}_2 = (-3, 0, -4, -5, 1)\}$;

d.) O sistema não possui solução. Uma base do espaço de soluções do sistema homogêneo correspondente (que sempre tem solução) é dada por $\{\vec{z}_1 = (3, 1, 0)\}$;

e.) A única solução é dada por $\vec{x} = (-37, -8, 5)$;

f.) Uma solução particular do sistema é dada por $\vec{x}_0 = (-5, 4, 2, 0)$, e uma base do espaço de soluções do sistema homogêneo correspondente é dada por $\{\vec{z}_1 = (13, 13, -1, 1)\}$;

g.) Uma solução particular do sistema é dada por $\vec{x}_0 = (-11, 0, 04, 9, 0)$, e uma base do espaço de soluções do sistema homogêneo correspondente (que sempre tem solução) é dada por $\{\vec{z}_1 = (-7, 1, 0, 0, 0), \vec{z}_2 = (2, 0, -3, -3, 1)\}$;

h.) O sistema não possui solução. Uma base do espaço de soluções do sistema homogêneo correspondente (que sempre tem solução) é dada por $\{\vec{z}_1 = (-19, -4, 1)\}$.

2 a.) (i) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right]$; (ii) Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{104}{21} \end{array}\right]$; (iii) Eliminação de Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{253}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{21} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{104}{21} \end{array}\right]$; (v) A solução do sistema é dada por $x_1 = \frac{253}{21}, x_2 = \frac{19}{21}, x_3 = -\frac{104}{21}$;

b.) (i) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right]$; (ii) Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$; (iii) Eliminação de Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$; (v) A solução do sistema é dada por $x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{4}$;

c.) (i) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$; (ii) Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$; (iii) Eliminação de Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$;

d.) (i) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right]$; (ii) Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$; (iii) Eliminação de Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$;

e.) (i) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$; (ii) Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{8} \end{array}\right]$; (iii) Eliminação de Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{7}{8} \end{array}\right]$;

f.) (i) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -6 & -4 & 2 & 30 \end{array}\right]$; (ii) Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -75 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$; (iii) Eliminação de Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$; (v) A solução do sistema é dada por $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 2, x_3 = 7$;

g.) (i) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -8 & 12 \\ 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right]$; (ii) Eliminação gaussiana e de Gauss-Jordan resultam na (mesma) matriz aumentada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$;

h.) (i) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 10 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & -8 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -6 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$; (ii) Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$; (iii) Eliminação de Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$;

i.) (i) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$; (ii) Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 27 & 5 \end{array}\right]$; (iii) Eliminação de Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & 27 & 5 \end{array}\right]$;

j.) (i) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & -12 & -11 & -16 & 5 \end{array}\right]$; (ii) Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$; (iii) Eliminação de Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{17}{5} & \frac{8}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$;

k.) (i) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{array}\right]$; (ii) Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$; (iii) Eliminação de Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$.

3 Apenas o item (b) não possui solução não-trivial.

4 a.) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$; eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$, e portanto a única solução é a solução trivial $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;

b.) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$; eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & \end{array}\right]$. Uma base de soluções é dada por $\{(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$;

c.) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$; eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Uma base de soluções é dada por $\{(1, -1, 1, 0)\}$;

d.) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$; eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$, e portanto a única solução é a solução trivial $x = y = z = 0$;

e.) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right]$; eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Uma base de soluções é dada por $\{(-6, 5, -1, 1)\}$;

f.) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$; eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, e portanto a única solução é a solução trivial $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

5 a.) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 3 & 6 & b \end{array}\right]$. Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \frac{b}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2b}{9} - \frac{a}{3} \end{array}\right]$, logo o sistema tem como solução $x = \frac{2a}{3} - \frac{b}{9}$, $y = \frac{2b}{9} - \frac{a}{3}$;

b.) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 & b \\ 0 & 3 & 3 & c \end{array}\right]$. Eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a - \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{3} - a + \frac{b}{2} \end{array}\right]$, logo o sistema tem como solução $x_1 = a - \frac{c}{3}$, $x_2 = a - \frac{b}{2}$, $x_3 = \frac{c}{3} - a + \frac{b}{2}$.

6 a.) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & \lambda^2 - 14 & \lambda + 2 \end{array}\right]$. Aplicando eliminação gaussiana, conseguimos avançar até obter a matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 16 & \lambda - 4 \end{array}\right]$. Se $\lambda \neq \pm 4$ ou -3, o sistema possui uma única solução. Se $\lambda = 4$ ou -3, o sistema possui mais de uma solução. Se $\lambda = -4$, o sistema não tem solução;

b.) A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{cc|c} \lambda - 3 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 0 \end{array}\right]$. Se $\lambda = 3$, o sistema possui uma única solução. Se $\lambda \neq 3$, aplicando eliminação gaussiana conseguimos avançar até obter a matriz aumentada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{\lambda-3} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3} & 0 \end{array}\right]$, logo o sistema possui uma única solução se $\lambda \neq 2$ ou 4. Se $\lambda = 2$ ou 4, então o sistema possui mais de uma solução.

7 A matriz aumentada do sistema tem a forma $\left[\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right]$. No caso $\lambda = 1$, eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, que tem solução não-trivial $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = 1$. No caso $\lambda = 2$, eliminação gaussiana resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$, logo a única solução é $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

8 a.) Gauss-Jordan resulta na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $\dim(T(V)) = 2$ e $\dim(\ker(T)) = 1$. Uma base de $\ker(T)$ é dada por $\{(16, 19, 1)\}$;

b.) Gauss-Jordan resulta na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $\dim(T(V)) = 2$ e $\dim(\ker(T)) = 1$. Uma base de $\ker(T)$ é dada por $\{(0, 1, 0)\}$;

c.) Gauss-Jordan resulta na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$, logo $\dim(T(V_1)) = 3$ e $\dim(\ker(T)) = 1$. Uma base de $\ker(T)$ é dada por $\{(\frac{6}{7}, 0, -\frac{4}{7}, 1)\}$;

d.) Gauss-Jordan resulta na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $\dim(T(V)) = 2$ e $\dim(\ker(T)) = 3$. Uma base de $\ker(T)$ é dada por $\{(-1, -1, 1, 0, 0), (-2, -1, 0, 1, 0), (-1, -2, 0, 0, 1)\}$;

e.) Gauss-Jordan resulta na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{22}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $\dim(T(V)) = 3$ e $\dim(\ker(T)) = 2$. Uma base de $\ker(T)$ é dada por $\{(-2, 0, 0, 1, 0), (-\frac{22}{3}, -\frac{11}{6}, \frac{5}{12}, 0, 1)\}$.

9 a.) $\vec{y}_1$ e $\vec{y}_2$ são l.i., $\vec{y}_3 = \vec{y}_2 + 2\vec{y}_1$ e $\vec{y}_4 = \vec{y}_2 - 2\vec{y}_1$, logo $\dim L(S) = 2$;

b.) $\vec{y}_1$ e $\vec{y}_3$ são l.i., $\vec{y}_2 = 2\vec{y}_1$ e $\vec{y}_4 = \vec{y}_1 + \vec{y}_3$, logo $\dim L(S) = 2$.

10 a.) Obtemos o sistema $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$, com matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$. Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, logo a única solução do sistema é $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e portanto $k = 0$. Em particular, S é l.i., logo $\dim(L(S)) = 3$;

b.) Obtemos o sistema $\begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$, com matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$. Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, logo a única solução do sistema é $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e portanto $k = 0$. Em particular, S é l.i., logo $\dim(L(S)) = 3$;

c.) Obtemos o sistema $\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases}$, com matriz aumentada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$. Gauss-Jordan resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$, logo a única solução do sistema é $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e portanto $k = 0$. Em particular, S é l.i., logo

$\dim(L(S)) = 4$.

11 Eliminação gaussiana aplicada à matriz aumentada do sistema $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & \lambda_1 \\ 1 & -2 & \lambda_2 \\ 1 & 1 & \lambda_3 \\ 1 & -4 & \lambda_4 \\ 1 & 5 & \lambda_5 \end{array}\right]$ resulta na matriz aumentada $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & \lambda_1 \\ 0 & 1 & \lambda_2 - \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 + 3\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_4 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_5 + 7\lambda_1 - 8\lambda_2 \end{array}\right]$, logo o sistema possui solução se e somente se $\lambda_3 = 4\lambda_2 - 3\lambda_1$, $\lambda_4 = 2\lambda_1 - \lambda_2$ e $\lambda_5 = 8\lambda_2 - 7\lambda_1$.

12 **a.)** Eliminação gaussiana resulta na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se $t \neq 1, -2$, logo o posto de A é igual a 3 nesses casos. Se $t = -2$, eliminação gaussiana resulta na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo o posto de A é igual a 2. Se $t = 1$, o posto de A é obviamente igual a 1;

b.) Eliminação gaussiana resulta na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -t \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} - t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se $t \neq 1, \frac{3}{2}$, logo o posto de A é igual a 3 nesses casos. Se $t = \frac{3}{2}$, eliminação gaussiana resulta na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo o posto de A é igual a 2. Se $t = 1$, eliminação gaussiana resulta na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo o posto de A é igual a 2.

13 **a.)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

b.) $A^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 8 & -8 & 3 \\ -10 & -11 & 12 \\ 3 & 18 & -12 \end{bmatrix}$;

c.) A tem nulidade igual a 2;

d.) $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 & -1 \\ -10 & 4 & 0 & 2 \\ 18 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.