Lista 1 – Álgebra Linear – Turmas NA2SA e NB2SA

1q'22

Prof. Pedro Lauridsen Ribeiro

Espaços Vetoriais

1 Sejam $\vec{u} = (-3, 2, 1, 0)$, $\vec{v} = (4, 7, -3, 2)$ e $\vec{w} = (5, -2, 8, 1)$ vetores em $\mathbb{R}^4$. Calcule:

a.) $\vec{v} - \vec{w}$;

b.) $2\vec{u} + 7\vec{v}$;

c.) $-\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$;

d.) $6(\vec{u} - 3\vec{v})$;

e.) $-\vec{v} - \vec{w}$;

f.) $(6\vec{v} - \vec{w}) - (4\vec{u} + \vec{v})$.

2 Dados os vetores $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (3, 3, 2)$ e $\vec{v}_4 = (1, 5, -1)$ em $\mathbb{R}^3$, calcule:

a.) $\vec{u} = \vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 - \vec{v}_4$;

b.) $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 - \vec{v}_4$;

c.) $\vec{w} = \vec{v}_3 - \frac{1}{3}\vec{v}_2 - \frac{4}{3}\vec{v}_1$.

3 O espaço $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes com m linhas, n colunas e entradas reais

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}\ ,\ i = 1, \ldots, m\ ,\ j = 1, \ldots, n$$

é um espaço vetorial (real) se imbuído das operações vetoriais "entrada a entrada": se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

então

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dadas as matrizes 2×3 $A, B, C \in \mathscr{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 4 \\ 12 & 13 & 1 \end{bmatrix},$$

a.) Calcule $3A - 2B + C$;

b.) Encontre números reais α, β diferentes de zero tais que $\alpha A + \beta B + C$ tenha a primeira coluna só com zeros.

4 Encontre os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^4$ tais que as componentes de $\vec{u}$ sejam todas iguais, a última componente de $\vec{v}$ é igual a 3 e $\vec{u} + \vec{v} = (1, 2, 3, 4)$.

5 Dados $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 2, 0)$ e $\vec{w} = (2, 0, 0)$, encontre números reais α, β, γ tais que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = (1, 1, 1)$.

6 Mostre que não existem escalares reais α, β, γ tais que $\alpha(1, 0, 1, 0) + \beta(1, 0, -2, 1) + \gamma(2, 0, 1, 2) = (1, -2, 2, 3)$.

7 Dados os vetores $\vec{x} = (1, 2, 3)$, $\vec{y} = (3, 2, 1)$ e $\vec{z} = (-3, 2, 7)$ em $\mathbb{R}^3$, obtenha números reais α, β tais que $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \vec{z}$. Quantas soluções admite esse problema?

8 Sejam os vetores $\vec{x} = (1, 1)$, $\vec{y} = (1, 2)$ e $\vec{z} = (2, 1)$ em $\mathbb{R}^2$. Encontre números reais não-nulos a, b, c, a', b', c' satisfazendo $a \neq a'$, $b \neq b'$, $c \neq c'$ e $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = a'\vec{x} + b'\vec{y} + c'\vec{z}$.

9 Defina a *média* de dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$ quaisquer num espaço vetorial V como $\vec{u} \boxplus \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$. Prove que $(\vec{x} \boxplus \vec{y}) \boxplus \vec{z} = \vec{x} \boxplus (\vec{y} \boxplus \vec{z})$ *se e somente se* $\vec{x} = \vec{z}$.

10 Dados dois espaços vetoriais V_1, V_2, considere o produto Cartesiano $V = V_1 \times V_2$ de V_1 e V_2. Mostre que as operações de soma vetorial $(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') = (\vec{x} + \vec{x}', \vec{y} + \vec{y}')$ e multiplicação escalar $\lambda(\vec{x}, \vec{y}) = (\lambda\vec{x}, \lambda\vec{y})$ são operações vetoriais em V.

11 São listados nos itens abaixo conjuntos V munidos de operações de soma vetorial e multiplicação escalar. Determine quais deles tem essas operações bem definidas para todos os seus elementos (no sentido de definirem elementos de V), e quais destes satisfazem os axiomas de um espaço vetorial (real). Justifique por que os restantes não são espaços vetoriais mostrando que *pelo menos um* dos axiomas de espaço vetorial falha, ou que uma das duas operações não é sempre bem definida em V.

a.) $V = \mathbb{R}^3 \ni \vec{x} = (x, y, z)$, $(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$, $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, y, z)$;

b.) $V = \mathbb{R}^3 \ni \vec{x} = (x, y, z)$, $(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$, $\lambda(x, y, z) = (0, 0, 0)$;

c.) $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{x} = (x, y)$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, $\lambda(x, y) = (2\lambda x, 2\lambda y)$;

d.) $V = \mathbb{R}$ com as operações usuais de soma e multiplicação em $\mathbb{R}$;

e.) $V = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de soma vetorial e multiplicação escalar em $\mathbb{R}^2$;

f.) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ com as operações usuais de soma vetorial e multiplicação escalar em $\mathbb{R}^2$;

g.) $V = \{(x, \ldots, x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de soma vetorial e multiplicação escalar em $\mathbb{R}^n$;

h.) $V = \mathbb{R}^2 \ni \vec{x} = (x, y)$, $(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$, $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$;

i.) $V = \{(1, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$, $(1, y) + (1, y') = (1, y + y')$, $\lambda(1, y) = (1, \lambda y)$;

j.) $V = \mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x + y', x' + y)$, $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$;

k.) $V = \mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (xx', yy')$, $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$;

l.) $V = \mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (3x+3x', 5y+5y')$, $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$;

m.)

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

com as operações usuais de soma vetorial e multiplicação escalar em $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (ver Exercício 3 acima);

n.)

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

com as operações usuais de soma vetorial e multiplicação escalar em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (ver Exercício 3 acima);

o.)

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

com as operações usuais de soma vetorial e multiplicação escalar em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (ver Exercício 3 acima);

p.) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $x + y = xy$, $\lambda x = x^\lambda = \exp(\lambda \log x)$;

q.) $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0\}$ com as operações usuais de soma vetorial e multiplicação escalar em $\mathbb{R}^n$ (aqui, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$);

r.) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax^2 + bx + c\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$, $\lambda(ax^2 + bx + c) = (\lambda a)x^2 + (\lambda b)x + \lambda c$.

Respostas parciais dos exercícios

1 **a.)** $(-1, 9, -11, 1)$;
b.) $(22, 53, -19, 14)$;
c.) $(-13, 13, -36, -2)$;
d.) $(-90, -114, 60, -36)$;
e.) $(-9, -5, -5, -3)$;
f.) $(27, 29, -27, 9)$.

2 **a.)** $(0, 0, 0)$;
b.) $(-1, -5, 2)$;
c.) $(1, 0, 0)$.

3 **a.)** $3A - 2B + C = \begin{bmatrix} -5 & -17 & 10 \\ 25 & 25 & -4 \end{bmatrix}$;
b.) $\alpha = -2$, $\beta = 3$.

4 $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 2, 3)$.

5 $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{12}$.

7 A única solução é dada por $\alpha = 3$, $\beta = -2$.

8 *Esboço:* trate $a - a' = \alpha$, $b - b' = \beta$ e $c - c' = \gamma$ como variáveis. Obtemos daí que $\alpha = -3\beta$ e $\beta = \gamma$. Uma solução possível dessas equações é dada por $\alpha = 3$, $\beta = \gamma = -1$. Tomando-se $a = 4$, $a' = 1$, $b = 1$, $b' = 2$, $c = 1$, $c' = 2$, verifica-se a fórmula desejada.

10 A prova é igual à do caso em que $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$.

11 **a.)** O axioma (e) $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$ falha;
b.) O axioma (h) $1\vec{x} = \vec{x}$ falha;
c.) O axioma (g) $\lambda_1(\lambda_2\vec{x}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{x}$ falha;
e.) V é espaço vetorial;
f.) O axioma (d) falha;
h.) O axioma (f) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$ falha;
j.) Os axiomas (a) $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$ e (b) $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ falham;
k.) O axioma (f) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$ falha;
m.) A soma vetorial de dois elementos de V não pertence a V;
p.) V é espaço vetorial;
q.) V é espaço vetorial.