

## LISTA 4 – ÁLGEBRA LINEAR – TURMAS NA2SA E NB2SA

1Q'22

Prof. Pedro Lauridsen Ribeiro

## Produto escalar

Assumimos que todo espaço vetorial (real)  $V$  é imbuído de um produto escalar fixo  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ . No caso em que  $V = \mathbb{R}^n \ni \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n), \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$  é o produto escalar canônico (de modo que a base canônica de  $\mathbb{R}^n$  é ortonormal – ver e.g. o Exercício 1 abaixo). Se  $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  é base de  $V$ , então  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)_S = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$  é a representação de  $\vec{x} \in V$  em termos de suas componentes em  $S$  – se, por exemplo,  $V = \mathbb{R}^n$  e  $S$  é a base canônica, então  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)_S = (x_1, \dots, x_n)$ .

Se  $p(t) = at^2 + bt + c$  é um polinômio de grau 2 ( $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ), o discriminante de  $p(t)$  é dado por  $\Delta = b^2 - 4ac$ , de modo que as raízes de  $p(t)$  são dadas por  $t_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

Adotamos as seguintes abreviações: c.l. = “combinação linear”; l.d. = “linearmente dependente(s)”; l.i. = “linearmente independente(s)”. Exercícios ou itens estrelados (\*) são mais trabalhosos.

**1** Mostre que a forma bilinear  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$  em  $V = \mathbb{R}^n$  é um produto escalar real em  $V$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é denominado o *produto escalar canônico* em  $\mathbb{R}^n$ ). Se  $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  é a base canônica de  $V$  e  $\vec{x} \in V$ , mostre que podemos escrever

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^n \langle \vec{e}_j, \vec{x} \rangle \vec{e}_j.$$

**2** Seja o espaço vetorial  $V = \mathbb{R}^2$ , e considere os vetores  $\vec{x} = (1, 2)$  e  $\vec{y} = (-1, 1)$ . Encontre  $\vec{z} = (z_1, z_2) \in V$  tal que  $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = -1$  e  $\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = 3$ .

**3** Seja  $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  a base canônica de  $V = \mathbb{R}^2$  e  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Defina  $\omega_A : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\omega_A(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_S^T A \vec{y}_S$ .

a.) Mostre que  $\omega_A$  é bilinear, i.e. satisfaz as propriedades de linearidade com respeito à pri-

meira e segunda variáveis;

b.) Mostre que  $\omega_A$  é um produto escalar em  $V$  se e somente se  $A = A^T, A_1^1 > 0, A_2^2 > 0$  e  $\det(A) > 0$ .

**4** Seja  $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  (ver Exercício 3 da Lista 1), e

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B) = \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} B_{ij}$$

$$= A_{11} B_{11} + A_{12} B_{12} + A_{21} B_{21} + A_{22} B_{22},$$

onde  $\text{Tr}(C) = C_{11} + C_{22}$  é o traço da matriz  $C = [C_{ij}] \in V$  (i.e.  $C_{ij}$  é a entrada de  $C$  na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna) e  $C^T = [C_{ji}]$  é a transposta de  $C$ . Mostre que  $\langle A, B \rangle$  é um produto escalar em  $V$ .

\* **5** Seja  $V = C^0([a, b], \mathbb{R}) =$  espaço vetorial das funções contínuas de  $[a, b]$  em  $\mathbb{R}$ , munido das operações vetoriais pontuais  $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$ ,  $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$ ,  $f, g \in V, \alpha, t \in \mathbb{R}$ . Mostre que

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$  é um produto escalar em  $V$ .

\* **6** Seja  $V = \mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R}) \doteq \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$  o espaço vetorial (com as operações pontuais de espaços de funções) dos polinômios de ordem  $\leq 2$  com coeficientes reais (ver Exercício 11 (r) da Lista 1), e  $S = \{f_{j+1}(t) = t^j \mid j = 0, 1, 2\}$  a base canônica de  $V$ .

a.) Mostre que se  $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2, g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$  são vetores em  $V$ , então

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \sum_{j,k=0}^2 \frac{a_j b_k}{j+k+1}.$$

b.) Mostre que  $\langle f, g \rangle$  define um produto escalar em  $V$ . (Dica: use o Exercício 5. Para provar que  $\langle f, f \rangle = 0$  implica  $f = 0$ , notar que a primeira identidade implica, pelo Exercício 5, que  $f$  se anula em qualquer ponto de  $[0, 1]$ )

**7** Se  $V$  é um espaço vetorial (real) e  $W$  é um subespaço vetorial de  $V$ , o complemento ortogonal de  $W$  é dado por

$$W^\perp = \{\vec{x} \in V \mid \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \text{ para todo } \vec{y} \in W\}.$$

a.) Mostre que  $W^\perp$  é subespaço vetorial de  $V$ .  
 b.) Seja  $S_k = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$  uma base o.n. de  $W$  (de modo que  $\dim(W) = k$ ), e considere a projeção ortogonal  $P_W$  ao longo de  $W$ :

$$P_W \vec{x} = \sum_{j=1}^k \langle \vec{e}_j, \vec{x} \rangle \vec{e}_j.$$

Mostre que  $P_W^2 = P_W, \vec{x} \in W$  se e somente se  $P_W \vec{x} = \vec{x}$ , e que  $\langle P_W \vec{x}, \vec{y} - P_W \vec{y} \rangle = 0$  para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in V$ . Conclua daí que  $P_W \vec{x} = \vec{0}$  se e somente se  $\vec{x} \in W^\perp$ .

c.) Mostre que se  $\vec{x} \in V$ , então existe uma única escolha de  $\vec{x}_0 \in W, \vec{x}_1 \in W^\perp$  tais que  $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$ . Conclua daí que  $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$ . (Dica: use o item (b))

d.) Mostre que se  $\dim(V) = n$  e  $\dim(W) = k$ , então  $\dim(W^\perp) = n - k$ . (Dica: estenda a base o.n.  $S_k$  de  $W$  a uma base  $\tilde{S}$  de  $V$  e ortonormalize  $\tilde{S}$  usando Gram-Schmidt. Conclua usando o item (c) que se  $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  é a base o.n. de  $V$  obtida a partir de  $S_k$ , então  $S_k^\perp = S \setminus S_k = \{\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$  é base de  $W^\perp$ )

**8** Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  um produto escalar em  $V$  (os pontos denotam os argumentos do produto escalar), cuja norma euclidiana é dada por  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ , e  $S_k = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$  um conjunto ortogonal em  $V$ . Seja

$$P_W(\vec{x}) = \sum_{j=1}^k \frac{\langle \vec{e}_j, \vec{x} \rangle}{\|\vec{e}_j\|^2} \vec{e}_j$$

a projeção ortogonal de  $V$  ao longo de  $W = L(S_k)$  com respeito a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (Exercício 7).

a.) Mostre que  $\|\vec{x}\|^2 = \|P_W(\vec{x})\|^2 + \|\vec{x} - P_W(\vec{x})\|^2$  para todo  $\vec{x} \in V$ . (Dica: demonstre primeiro a seguinte forma do Teorema de Pitágoras: se  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ , então  $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ )

b.) Demonstre a desigualdade de Bessel: para todo  $\vec{x} \in V$ ,

$$\sum_{j=1}^k \frac{\langle \vec{e}_j, \vec{x} \rangle^2}{\|\vec{e}_j\|^2} \leq \|\vec{x}\|^2,$$

com igualdade se e somente se  $\vec{x} \in W$ . (Dica: use o teorema de Pitágoras para obter que  $\|P_W(\vec{x})\|^2 = \sum_{j=1}^k \frac{\langle \vec{e}_j, \vec{x} \rangle^2}{\|\vec{e}_j\|^2}$ . Conclua empregando o resultado do item (a))

**9** Use ortonormalização de Gram-Schmidt para obter uma base o.n.  $S_k$  do subespaço vetorial  $W = L(\tilde{S})$  de dimensão  $\dim(W) = k$  do espaço vetorial  $V$  a partir da base dada  $\tilde{S}$  de  $W$  nos seguintes casos:

- $V = \mathbb{R}^2, \tilde{S} = \{\vec{f}_1 = (3, 4)\};$
- $V = W = \mathbb{R}^3, \tilde{S} = \{\vec{f}_1 = (1, 0, 1), \vec{f}_2 = (1, 0, -1), \vec{f}_3 = (0, 3, 4)\};$
- $V = \mathbb{R}^4$  e  $\tilde{S} = \{\vec{f}_1 = (1, 0, -1, 1), \vec{f}_2 = (2, 3, -1, 2)\}.$

**10** Use as bases o.n.'s obtidas no Exercício 9 para escrever a projeção ortogonal  $P_W \vec{x}$  de  $\vec{x} \in V = \mathbb{R}^n$  sobre  $W$  nos itens (a)–(c) desse Exercício em termos das componentes de  $\vec{x}$  na base canônica. Use os resultados obtidos para construir uma base o.n.  $S_1$  do complemento ortogonal  $W^\perp$  de  $W$  (ver o Exercício 7 acima) nos itens (a) e (c). (*Dica*: procure vetores  $\vec{x}$  tais que  $\vec{f} = \vec{x} - P_W \vec{x} \neq \vec{0}$ )

**11** Seja  $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  munido do produto escalar dado no Exercício 4 acima. Obtenha o complemento ortogonal  $W^\perp$  (ver o Exercício 7 acima) dos seguintes subespaços vetoriais  $W \subset V$  abaixo:

- a.)  $W = \{A = [A_{ij}] \in V \mid A_{ij} = A_{ji}\}$ ;
- b.)  $W = \{A = [A_{ij}] \in V \mid A = a\mathbb{1}\}$ , onde  $\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  é a *matriz identidade*;
- c.)  $W = \{A \in V \mid A_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\}$ .

\* **12** Seja  $V = \mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$ , e  $\langle f, g \rangle$  o produto escalar dado no Exercício 6.

- a.) Seja  $W = L(\{f(t) \equiv 1\})$ . Encontre  $W^\perp$  tal como definido no Exercício 5.
- b.) Aplique ortogonalização de Gram-Schmidt à base canônica de  $V$ .

## Respostas parciais dos exercícios

**3 a.)** Notar que se  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  e  $\vec{y} = (y_1, y_2)$ , então  $\omega_A(\vec{x}, \vec{y}) = x_1(A_1^1 y_1 + A_1^2 y_2) + x_2(A_2^1 y_1 + A_2^2 y_2)$ .

**b.)** (esboço) Mostre que  $\omega_A$  ser simétrico é o mesmo que exigir  $A = A^T$ . Notar ainda que se  $\vec{x} = (x, y)$  e  $A = A^T$ , então  $\omega_A(\vec{x}, \vec{x}) = A_1^1 x^2 + 2A_1^2 xy + A_2^2 y^2$  – use os casos particulares  $\vec{x} = (1, 0), (0, 1)$  para mostrar que  $\omega_A$  ser positiva definida implica  $A_1^1, A_2^2 > 0$ . Seja o polinômio  $p(x)$  de grau  $\leq 2$  em  $x$  dado por  $p(x) = \omega_A(\vec{x}, \vec{x})$  ( $y$  é visto aqui como uma constante) – mostre que o discriminante de  $p(x)$  é dado por  $\Delta = -4y^2 \det(A)$ , e conclua daí que  $\omega_A$  ser positiva definida implica  $\det A > 0$ . Conversamente, se  $A_1^1, A_2^2 > 0$  e  $\det(A) > 0$ , mostre que  $p(x) > 0$  para todo  $y \neq 0$  e, caso  $y = 0$ , temos  $p(x) = 0$  se e somente se  $x = 0$ .

**9 a.)**  $S_1 = \left\{ \vec{e}_1 = \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \right\};$

**b.)**  $S_3 = \left\{ \vec{e}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \vec{e}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \vec{e}_3 = (0, 1, 0) \right\};$

**c.)**  $S_2 = \left\{ \vec{e}_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \vec{e}_2 = \left( \sqrt{\frac{1}{87}}, \sqrt{\frac{27}{29}}, \sqrt{\frac{4}{87}}, \sqrt{\frac{1}{87}} \right) \right\}.$

**10 a.)**  $P_W(x_1, x_2) = \left( \frac{9x_1+12x_2}{25}, \frac{12x_1+16x_2}{25} \right), \vec{f}_2 = (1, 0) - P_W(1, 0) = \left( \frac{16}{25}, -\frac{12}{25} \right), S_1 = \left\{ \vec{e}_2 = \left( \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right) \right\}.$

**11 a.)**  $W = \{B = [B_{ij}] \in V \mid B_{ij} = -B_{ji}\};$

**b.)**  $W = \{B = [B_{ij}] \in V \mid \text{Tr}(B) = 0\};$

**c.)**  $W = \{B = [B_{ij}] \in V \mid B_{11} = B_{22} = 0\}.$