# Lista 2 – Álgebra Linear – Turma NASA

## 2q'22

Prof. Pedro Lauridsen Ribeiro

### Subespaços Vetoriais, Combinações Lineares

**1** Determine quais dos seguintes subconjuntos $W \subset V$ do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ são subespaços vetoriais de $V$:

**a.)** $W = \{\vec{x} = (a, b, c) \in V \mid b = c = 0\}$;

**b.)** $W = \{\vec{x} = (a, b, c) \in V \mid b = c = 1\}$;

**c.)** $W = \{\vec{x} = (a, b, c) \in V \mid b = a + c\}$;

**d.)** $W = \{\vec{x} = (a, b, c) \in V \mid b = a + c + 1\}$;

**e.)** $W = \{\vec{x} = (a, b, c) \in V \mid a = b = c\}$;

**f.)** $W = \{\vec{x} = (a, b, c) \in V \mid a = c \text{ ou } b = c\}$;

**g.)** $W = \{\vec{x} = (a, b, c) \in V \mid a^2 - b^2 = 0\}$;

**h.)** $W = \{\vec{x} = (a, b, c) \in V \mid b = 2a, c = 3a\}$.

**2** Determine quais dos seguintes subconjuntos $W \subset V$ do espaço vetorial $V = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes $2 \times 2$ com entradas reais (ver Exercício 3 da Lista 1) são subespaços vetoriais de $V$:

**a.)**

$$W = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} ;$$

**b.)**

$$W = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \;\middle|\; a + b + c + d = 0 \right\} ;$$

**c.)**

$$W = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \;\middle|\; \det(A) = ad - bc = 0 \right\} ;$$

**d.)**

$$W = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V \;\middle|\; c = 0 \right\} .$$

**3** Mostre que os seguintes subconjuntos $W \subset V$ do espaço vetorial $V = \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ com entradas reais (ver Exercício 3 da Lista 1) são subespaços vetoriais de $V$:

**a.)** $W = \{A = [a_{ij}] \in V \mid \mathrm{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = 0\}$;

**b.)** $W = \{A = [a_{ij}] \in V \mid a_{ji} = -a_{ij} \, , \, i, j = 1, \ldots, n\}$;

**c.)** $W = \{A = [a_{ij}] \in V \mid AB = BA\}$. Aqui $B = [b_{ij}] \in V$ é uma matriz fixa, e $AB$ denota o produto das matrizes $A$ e $B$, cujo elemento na $i$-ésima linha e $j$-ésima coluna é dado por $\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$ (analogamente para $BA$).

**4** Determine quais dos seguintes subconjuntos $W \subset V$ do espaço vetorial $V = \mathscr{P}_{\leq 3}(\mathbb{R}) = \{x \mapsto$

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ dos polinômios de ordem $\leq 3$ (ver Exercício 11 (r) da Lista 1) são subespaços vetoriais de $V$:

- **a.)** $W = \{f \in V \mid a_0 = 0\}$;
- **b.)** $W = \{f \in V \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$;
- **c.)** $W = \{f \in V \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}$;
- **d.)** $W = \{f \in V \mid a_2 = a_3 = 0\}$.

**5** Determine quais dos seguintes subconjuntos $W \subset V$ do espaço vetorial $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são subespaços vetoriais de $V$:

- **a.)** $W = \{f \in V \mid f(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}\}$;
- **b.)** $W = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$;
- **c.)** $W = \{f \in V \mid f(0) = 2\}$;
- **d.)** $W = \{f \in V \mid f(x) =$constante para todo $x \in \mathbb{R}\}$;
- **e.)** $W = \{f \in V \mid f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{sen}(x)\ ,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$.

**6** Determine:

- **a.)** Quais dos subconjuntos $V$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ dados pelos itens (e), (f), (g) e (i) do Exercício 11 da Lista 1 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$;
- **b.)** Quais dos subconjuntos $V$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ dados pelos itens (g) e (q) do Exercício 11 da Lista 1 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$;
- **c.)** Quais dos subconjuntos $V$ do espaço vetorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dados pelos itens (m), (n) e (o) do Exercício 11 da Lista 1 são subespaços vetoriais de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

**7** Dado um subconjunto $\varnothing \neq S \subset V$ de um espaço vetorial $V$ sobre $\mathbb{R}$, denotemos por $L(S) = \{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{x}_j \mid \vec{x}_j \in S\ ,\ \lambda_j \in \mathbb{R}\ ,\ n \in \mathbb{N}\} \subset V$ o subespaço vetorial gerado por $S$ (se $S = \varnothing$, definimos $L(S) = \{\vec{0}\}$). Prove as seguintes afirmações:

- **a.)** $S \subset L(S)$;
- **b.)** Se $S = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$, então podemos tomar $n = k$ *fixo* na definição de $L(S)$;
- **c.)** Seja $W \subset V$ um subespaço vetorial de $V$. Se $S \subset W$, então $L(S) \subset W$. Em outras palavras, $L(S)$ é o menor subespaço vetorial de $V$ que contém $S$;
- **d.)** $S$ é subespaço vetorial de $V$ se e somente se $L(S) = S$; (*Dica:* use a caracterização de subespaços vetoriais vista em aula)
- **e.)** Se $S \subset T \subset V$, então $L(S) \subset L(T)$.
- **f.)** Se $S, T \subset V$ são subconjuntos de $V$, então $L(S \cap T) \subset L(S) \cap L(T)$;
- **g.)** Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 0, 0)\}$ e $T = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 0)\}$. Mostre que $L(S \cap T) \neq L(S) \cap L(T)$.

**8** Seja $W = L(\{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\})$. Encontre $\lambda$, $\mu$, $\nu \in \mathbb{R}$ tais que $(x, y, z) \in W$ se e somente se $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$.

**9** Exprima os seguintes vetores em $V = \mathbb{R}^3$ como combinações lineares dos vetores $\vec{u} = (0, -2, 2)$ e $\vec{v} = (1, 3, -1)$, se possível:

- **a.)** $(2, 2, 2)$;
- **b.)** $(3, 1, 5)$;
- **c.)** $(0, 4, 5)$;
- **d.)** $(0, 0, 0)$.

**10** Mostre que a matriz $D = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}$ pode ser escrita como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

**11** Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ e $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ os vetores em $V = \mathbb{R}^3$ dados respectivamente pelas linhas e pelas colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} .$$

**a.)** Verifique que esses vetores satisfazem as relações $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ e $\vec{w}_3 = 2\vec{w}_2 - \vec{w}_1$;

**b.)** Exprima $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, e vice-versa;

**c.)** Conclua dos dois itens anteriores que $L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}) = L(\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\})$.

# Respostas parciais dos exercícios

**1** $W$ definido nos itens (a), (c), (e) e (h) são subespaços vetoriais.

**2** $W$ definido nos itens (b) e (d) são subespaços vetoriais.

**4** $W$ definido nos itens (a), (b) e (d) são subespaços vetoriais.

**5** $W$ definido nos itens (b), (d) e (e) são subespaços vetoriais.

**6** **a.)** Itens (e), (g) (com $n = 2$) e (i);
**b.)** Ambos os itens (g) e (q);
**c.)** Itens (n) e (o).

**7** **a.)** Claramente, dado qualquer $\vec{x} \in S$, temos que $\vec{x}$ é uma combinação linear de um único elemento de $S$ (com $\lambda_1 = 1$);
**b.)** Dado $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{x}_j \in L(S)$, seja $T = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\} \subset S$. Como $S$ é finito, segue que $S \setminus T$ é finito. Escrevendo $S \setminus T = \{\vec{x}_{n+1}, \ldots, \vec{x}_k\}$ e definindo $\lambda_j = 0$ para $j = n+1, \ldots, k$, temos que $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{x}_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x}_j$;
**d.)** Segue do item (a) que basta mostrar que $S$ é subespaço vetorial de $V$ se e somente se $L(S) \subset S$. De fato, se $L(S) \subset S$ então $S$ é subespaço vetorial de $V$. Conversamente, prova-se por indução em $n$ que se $S$ é subespaço vetorial de $V$, então $L(S) \subset S$;
**g.)** Claramente $S \cap T = \{(0, 0, 0)\}$ e portanto $L(S \cap T) = \{(0, 0, 0)\}$, mas $(2, 0, 0) = (1, 0, 1) + (1, 0, -1) = (1, 1, 0) + (1, -1, 0) \in L(S) \cap L(T)$.

**8** Uma resposta possível é $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = -1$.

**9** **a.)** $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; **b.)** $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$; **c.)** Não é possível escrever $(0, 4, 5)$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$; **d.)** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

**10** $D = A + B + 4C$.

**11** **b.)** $\vec{w}_1 = \frac{11}{3}\vec{v}_1 - \frac{2}{3}\vec{v}_2$, $\vec{w}_2 = \frac{10}{3}\vec{v}_1 - \frac{1}{3}\vec{v}_2$, $\vec{v}_1 = -\frac{1}{3}\vec{w}_1 + \frac{2}{3}\vec{w}_2$, $\vec{v}_2 = -\frac{10}{3}\vec{w}_1 + \frac{11}{3}\vec{w}_2$.