Lista 3 – Álgebra Linear – Turma NASA

2Q'22

Prof. Pedro Lauridsen Ribeiro

(In)dependência linear, bases e dimensão

Se $S = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ é base de V, então $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)_S = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$ é a representação de $\vec{x} \in V$ em termos de suas componentes em S – se, por exemplo, $V = \mathbb{R}^n$ e S é a base canônica, então $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)_S = (x_1, \ldots, x_n)$.

Adotamos as seguntes abreviações: c.l. = "combinação linear"; l.d. = "linearmente dependente(s)"; l.i. = "linearmente independente(s)". Exercícios estrelados (*) são mais trabalhosos.

1 Prove que os seguintes subconjuntos $S \subset V$ de espaços vetoriais V sobre $\mathbb{R}$ são l.d. por inspeção direta dos elementos de S:

a.) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(-1, 2, 4), (5, -10, -20)\}$;

b.) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(3, -1), (4, 5), (-4, 7)\}$;

c.) $V = \mathscr{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$ (ver exercício 4 da Lista 2), $S = \{f_1(x) = 3-2x+x^2, f_2(x) = 6-4x+2x^2\}$;

d.) $V = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (ver exercício 3 da Lista 1), $S = \left\{\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

2 Quais dos seguintes subconjuntos $S \subset V = \mathbb{R}^3$ são l.d.? Justifique.

a.) $S = \{(4, -1, 2), (-4, 10, 2)\}$;

b.) $S = \{(-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)\}$;

c.) $S = \{(8, -1, 3), (4, 0, 1)\}$;

d.) $S = \{(-2, 0, 1), (3, 2, 5), (6, -1, 1), (7, 0, -2)\}$.

3 Quais dos seguintes subconjuntos $S \subset V = \mathbb{R}^4$ são l.d.? Justifique.

a.) $S = \{(3, 8, 7, -3), (1, 5, 3, -1), (2, -1, 2, 6), (1, 4, 0, 3)\}$;

b.) $S = \{(0, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 0), (1, 1, 0, -1)\}$;

c.) $S = \{(0, -3, -3, -6), (-2, 0, 0, -6), (0, -4, -2, -2), (0, -8, 4, -4)\}$;

d.) $S = \{(3, 0, -3, 6), (0, 2, 3, 1), (0, -2, -2, 0), (-2, 1, 2, 1)\}$.

4 Quais dos seguintes subconjuntos $S \subset V = \mathscr{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$ são l.d.? Justifique.

a.) $S = \{2-x+4x^2, 3+6x+2x^2, 2+10x-4x^2\}$;

b.) $S = \{3+x+x^2, 2-x+5x^2, 4-3x^2\}$;

c.) $S = \{6-x^2, 1+x+4x^2\}$;

d.) $S = \{1+3x+3x^2, x+4x^2, 5+6x+3x^2, 7+2x-x^2\}$.

5 Prove que os seguintes subconjuntos $S \subset V$ de espaços vetoriais V sobre $\mathbb{R}$ *não* são bases de V por inspeção direta dos elementos de S (isto é, *sem* usar informação sobre a dimensão de V):

a.) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,2), (0,3), (2,7)\}$;

b.) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(-1,3,2), (6,1,1)\}$;

c.) $V = \mathscr{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$, $S = \{f_1(x) = 1+x+x^2, f_2(x) = x-1\}$;

d.) $V = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \right\}$.

6 Quais dos seguintes subconjuntos $S \subset V = \mathbb{R}^2$ são bases de V? Justifique.

a.) $S = \{(2,1), (3,0)\}$;

b.) $S = \{(4,1), (-7,-8)\}$;

c.) $S = \{(0,0), (1,3)\}$;

d.) $S = \{(3,9), (-4,-12)\}$.

7 Quais dos seguintes subconjuntos $S \subset V = \mathbb{R}^3$ são bases de V? Justifique.

a.) $S = \{(1,0,0), (2,2,0), (3,3,3)\}$;

b.) $S = \{(3,1,-4), (2,5,6), (1,4,8)\}$;

c.) $S = \{(2,-3,1), (4,1,1), (0,-7,1)\}$;

d.) $S = \{(1,6,4), (2,4,-1), (-1,2,5)\}$.

8 Quais dos seguintes subconjuntos $S \subset V = \mathscr{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$ são bases de V? Justifique.

a.) $S = \{1-3x+2x^2, 1+x+4x^2, 1-7x\}$;

b.) $S = \{4+6x+x^2, -1+4x+2x^2, 5+2x-x^2\}$;

c.) $S = \{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$;

d.) $S = \{-4+x+3x^2, 6+5x+2x^2, 8+4x+x^2\}$.

9 Mostre que

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $V = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

10 Seja $S = \{f_1(x) = \cos^2 x, f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x, f_3(x) = \cos 2x\} \subset V = F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, e $W = L(S) \subset V$ o subespaço vetorial gerado por S.

a.) Mostre que S *não* é uma base de W;

b.) Encontre uma base de W.

11 Calcule as componentes de $\vec{x} \in V = \mathbb{R}^2$ na base $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} \subset V$ nos seguintes casos:

a.) $\vec{x} = (3,-7)$, $S = \{(1,0), (0,1)\}$;

b.) $\vec{x} = (1,1)$, $S = \{(2,-4), (3,8)\}$;

c.) $\vec{x} = (a,b)$, $S = \{(1,0), (0,1)\}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

12 Calcule as componentes de $\vec{x} \in V = \mathbb{R}^3$ na base $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \subset V$ nos seguintes casos:

a.) $\vec{x} = (3,3,3)$, $S = \{(2,-1,3), (1,0,0), (2,2,0)\}$;

b.) $\vec{x} = (7,-8,9)$, $S = \{(5,-12,3), (1,2,3), (-4,5,6)\}$.

13 Calcule as componentes de $f \in V = \mathscr{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$ na base $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ nos seguintes casos:

a.) $f(x) = 4-3x+x^2$, $S = \{1, x, x^2\}$;

b.) $f(x) = 2-x+x^2$, $S = \{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$.

14 Calcule as componentes de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in$

$V = \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ na base

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

15 Determine a dimensão dos seguintes subespaços $W \subset V = \mathbb{R}^4$:

a.) $W = \{(a, b, c, d) \in V \mid d = 0\}$;

b.) $W = \{(a, b, c, d) \in V \mid d = a + b, c = a - b\}$;

c.) $W = \{(a, b, c, d) \in V \mid a = b = c = d\}$.

16 Determine a dimensão do subespaço $W \subset V = \mathscr{P}_{\leq 3}(\mathbb{R})$ dado por $W = \{x \mapsto f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in V \mid a_0 = 0\}$.

17 Encontre um vetor da base *canônica* de $V = \mathbb{R}^3$ que pode ser acrescentado ao subconjunto l.i. $S' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} \subset V$ de modo a obter uma base de V nos seguintes casos:

a.) $S' = \{(-1, 2, 3), (1, -2, -2)\}$;

b.) $S' = \{(1, -1, 0), (3, 1, -2)\}$.

18 Encontre dois vetores da base *canônica* de $V = \mathbb{R}^4$ que podem ser acrescentados ao subconjunto l.i. $S' = \{\vec{x}_1 = (1, -4, 2, -3), \vec{x}_2 = (-3, 8, -4, 6)\} \subset V$ de modo a obter uma base de V.

19 Seja $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ uma base do espaço vetorial V. Mostre que $T = \{\vec{x}_1, \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3\}$ também é uma base de V.

* **20** Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $\dim V = n$, e $S = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ uma base de V.

a.) Mostre que $\widetilde{S} = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k\}$ é um subconjunto l.i. de V se e somente se o subconjunto $\overline{S} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n = \{\vec{v} : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}\}$ é l.i., onde $\vec{v}_l(j)$ é igual à j-ésima componente de $\vec{y}_l$ na base S, $l = 1, \ldots, k$;

b.) Dada a notação do item anterior, mostre que $L(\widetilde{S}) = V$ se e somente se $L(\overline{S}) = \mathbb{R}^n$.

* **21** Use o Exercício anterior aplicado a $V = \mathscr{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$, $S = \{e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2\}$ (base canônica de V) para obter bases de $W = L(\widetilde{S})$ nos seguintes casos:

a.) $\widetilde{S} = \{-1 + x - 2x^2, 3 + 3x + 6x^2, 9\}$;

b.) $\widetilde{S} = \{1 + x, x^2, -2 + 2x\}$;

c.) $\widetilde{S} = \{1 + x - 3x^2, 2 + 2x - 6x^2, 3 + 3x - 9x^2\}$.

Respostas parciais dos exercícios

1 **a.)** $(5, -10, -20) = -5(-1, 2, 4)$;
c.) $f_2 = 2f_1$;
d.) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

2 O item (d) é l.d., pois consiste de quatro vetores e $\dim V = 3$. Os outros itens são l.i. – por exemplo, há apenas dois vetores em S nos itens (a) e (c), mas em nenhum desses itens os dois vetores são um múltiplo escalar do outro.

3 Nenhum deles, os quatro itens são l.i. . Por exemplo, no item (b) qualquer combinação linear dos dois primeiros vetores em S é da forma $(3b, 3b, 2a, 2a)$, $a, b \in \mathbb{R}$, que jamais pode ser um múltiplo escalar do terceiro vetor em S.

4 Somente o item (d) é l.d., pois consiste de quatro vetores e $\dim V = 3$. Os outros itens são l.i. – por exemplo, no item (c) S consiste de dois vetores e um não é múltiplo escalar do outro.

5 **a.)** $2(1, 2) + (0, 3) - (2, 7) = 0$, logo S não é l.i.;
c.) O polinômio $f(x) = x^2$ não pode ser escrito como combinação linear de f_1 e f_2, logo S não varre V;
d.) Os quatro últimos vetores de S são l.i.; basta encontrar a combinação linear deles que representa o primeiro vetor.

6 Itens (a) e (b), pois apenas estes são l.i. .

7 Itens (a), (b) e (c), pois apenas estes são l.i. .

8 Itens (c) e (d), pois apenas estes são l.i. .

10 **a.)** $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$;
b.) $\lambda_1 \cos^2 x + \lambda_2 \operatorname{sen}^2 x = (\lambda_1 - \lambda_2)\operatorname{sen}^2(x) + \lambda_1$ para qualsquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Decorre dessa fórmula que $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$ constitui uma base de W.

11 **b.)** $(1, 1) = (\frac{2}{7}, \frac{1}{7})_S$.

12 **a.)** $(3, 3, 3) = (1, -3, 2)_S$.

13 **b.)** $2 - x + x^2 = (0, 2, -1)_S$.

14 $A = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1, 3)_S$.

15 **a.)** $\dim W = 3$;
b.) $\dim W = 2$;
c.) $\dim W = 1$.

16 $\dim W = 3$.

17 Uma maneira equivalente de formular o exercício é: qual vetor da base canônica de V não pode ser escrito como combinação linear dos elementos de S'?

18 Uma maneira equivalente de formular o exercício é: quais vetores da base canônica de V não podem ser escritos como combinação linear dos elementos de S'?

19 Notar que $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \lambda_3(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3) = 3\lambda_1\vec{x}_1 + 2\lambda_2\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3$.