Lista 4 – Álgebra Linear – Turma NASA

2q'22

Prof. Pedro Lauridsen Ribeiro

Produto escalar

Assumimos que todo espaço vetorial (real) V é imbuído de um produto escalar fixo $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$. No caso em que $V=\mathbb{R}^n\ni\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n),\vec{y}=(y_1,\ldots,y_n)$, $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{j=1}^n x_jy_j$ é o produto escalar canônico (de modo que a base canônica de $\mathbb{R}^n$ é ortonormal – ver e.g. o Exercício 1 abaixo). Se $S=\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ é base de V, então $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)_S=\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$ é a representação de $\vec{x}\in V$ em termos de suas componentes em S – se, por exemplo, $V=\mathbb{R}^n$ e S é a base canônica, então $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)_S=(x_1,\ldots,x_n)$.

Se $p(t)=at^2+bt+c$ é um polinômio de grau 2 ($a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$), o *discriminante* de $p(t)$ é dado por $\Delta=b^2-4ac$, de modo que as raízes de $p(t)$ são dadas por $t_\pm=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Adotamos as seguntes abreviações: c.l. = "combinação linear"; l.d. = "linearmente dependente(s)"; l.i. = "linearmente independente(s)". Exercícios ou itens estrelados (*) são mais trabalhosos.

1 Mostre que a forma bilinear $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{j=1}^n x_jy_j$ em $V=\mathbb{R}^n$ é um produto escalar real em V ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ é denominado o *produto escalar canônico* em $\mathbb{R}^n$). Se $S=\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ é a base canônica de V e $\vec{x}\in V$, mostre que podemos escrever

$$\vec{x}=\sum_{j=1}^n\langle\vec{e}_j,\vec{x}\rangle\vec{e}_j\ .$$

2 Seja o espaço vetorial $V=\mathbb{R}^2$, e considere os vetores $\vec{x}=(1,2)$ e $\vec{y}=(-1,1)$. Encontre $\vec{z}=(z_1,z_2)\in V$ tal que $\langle\vec{x},\vec{z}\rangle=-1$ e $\langle\vec{y},\vec{z}\rangle=3$.

3 Seja $S=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ a base canônica de $V=\mathbb{R}^2$ e $A\in\mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$. Defina $\omega_A:V^2\to\mathbb{R}$ por $\omega_A(\vec{x},\vec{y})=\vec{x}_S^TA\vec{y}_S$.

a.) Mostre que ω_A é *bilinear*, i.e. satisfaz as propriedades de linearidade com respeito à primeira e segunda variáveis;

b.) Mostre que ω_A é um produto escalar em V se e somente se $A=A^T$, $A^1_1>0$, $A^2_2>0$ e $\det(A)>0$.

4 Seja $V=\mathscr{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ (ver Exercício 3 da Lista 1), e

$$\begin{aligned}\langle A,B\rangle=\mathrm{Tr}(A^TB)&=\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}B_{ij}\\&=A_{11}B_{11}+A_{12}B_{12}+A_{21}B_{21}+A_{22}B_{22}\ ,\end{aligned}$$

onde $\mathrm{Tr}(C)=C_{11}+C_{22}$ é o *traço* da matriz $C=[C_{ij}]\in V$ (i.e. C_{ij} é a entrada de C na i-ésima linha e j-ésima coluna) e $C^T=[C_{ji}]$ é a *transposta* de C. Mostre que $\langle A,B\rangle$ é um produto escalar em V.

* **5** Seja $V=C^0([a,b],\mathbb{R})$ = espaço vetorial das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$, munido das operações vetoriais pontuais $(f+g)(t)=f(t)+g(t)$, $(\alpha f)(t)=\alpha f(t)$, $f,g\in V$, $\alpha,t\in\mathbb{R}$. Mostre que

$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ é um produto escalar em V.

*** 6** Seja $V = \mathscr{P}_{\leq 2}(\mathbb{R}) \doteq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2\ ,\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço vetorial (com as operações pontuais de espaços de funções) dos polinômios de ordem ≤ 2 com coeficientes reais (ver Exercício 11 (r) da Lista 1), e $S = \{f_{j+1}(t) = t^j \mid j = 0, 1, 2\}$ a *base canônica* de V.

a.) Mostre que se $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, $g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ são vetores em V, então

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \sum_{j,k=0}^{2} \frac{a_j b_k}{j+k+1}\ .$$

b.) Mostre que $\langle f, g\rangle$ define um produto escalar em V. (*Dica:* use o Exercício 5. Para provar que $\langle f, f\rangle = 0$ implica $f = 0$, notar que a primeira identidade implica, pelo Exercício 5, que f se anula em qualquer ponto de $[0, 1]$)

7 Se V é um espaço vetorial (real) e W é um subespaço vetorial de V, o *complemento ortogonal* de W é dado por

$$W^{\perp} = \{\vec{x} \in V \mid \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0 \text{ para todo } \vec{y} \in W\}\ .$$

a.) Mostre que $W^{\perp}$ é subespaço vetorial de V.

b.) Seja $S_k = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ uma base o.n. de W (de modo que $\dim(W) = k$), e considere a *projeção ortogonal* P_W ao longo de W:

$$P_W \vec{x} = \sum_{j=1}^{k} \langle \vec{e}_j, \vec{x}\rangle \vec{e}_j\ .$$

Mostre que $P_W^2 = P_W$, $\vec{x} \in W$ se e somente se $P_W\vec{x} = \vec{x}$, e que $\langle P_W\vec{x}, \vec{y} - P_W\vec{y}\rangle = 0$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$. Conclua daí que $P_W\vec{x} = \vec{0}$ se e somente se $\vec{x} \in W^{\perp}$.

c.) Mostre que se $\vec{x} \in V$, então existe uma *única* escolha de $\vec{x}_0 \in W$, $\vec{x}_1 \in W^{\perp}$ tais que $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$. Conclua daí que $W \cap W^{\perp} = \{\vec{0}\}$. (*Dica:* use o item (b))

d.) Mostre que se $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = k$, então $\dim(W^{\perp}) = n - k$. (*Dica:* estenda a base o.n. S_k de W a uma base $\tilde{S}$ de V e ortonormalize $\tilde{S}$ usando Gram-Schmidt. Conclua usando o item (c) que se $S = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ é a base o.n. de V obtida a partir de S_k, então $S_k^{\perp} = S \setminus S_k = \{\vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ é base de $W^{\perp}$)

8 Seja $\langle \cdot, \cdot\rangle$ um produto escalar em V (os pontos denotam os argumentos do produto escalar), cuja norma euclidiana é dada por $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle}$, e $S_k = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ um conjunto *ortogonal* em V. Seja

$$P_W(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \vec{e}_j, \vec{x}\rangle}{\|\vec{e}_j\|^2} \vec{e}_j$$

a projeção ortogonal de V ao longo de $W = L(S_k)$ com respeito a $\langle \cdot, \cdot\rangle$ (Exercício 7).

a.) Mostre que $\|\vec{x}\|^2 = \|P_W(\vec{x})\|^2 + \|\vec{x} - P_W(\vec{x})\|^2$ para todo $\vec{x} \in V$. (*Dica:* demonstre primeiro a seguinte forma do *Teorema de Pitágoras:* se $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0$, então $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$)

b.) Demonstre a *desigualdade de Bessel:* para todo $\vec{x} \in V$,

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \vec{e}_j, \vec{x}\rangle^2}{\|\vec{e}_j\|^2} \leq \|\vec{x}\|^2\ ,$$

com igualdade se e somente se $\vec{x} \in W$. (*Dica:* use o teorema de Pitágoras para obter que $\|P_W(\vec{x})\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \vec{e}_j, \vec{x}\rangle^2}{\|\vec{e}_j\|^2}$. Conclua empregando o resultado do item (a))

9 Use ortonormalização de Gram-Schmidt para obter uma base o.n. S_k do subespaço vetorial $W = L(\tilde{S})$ de dimensão $\dim(W) = k$ do espaço vetorial V a partir da base dada $\tilde{S}$ de W nos seguintes casos:

a.) $V = \mathbb{R}^2$, $\tilde{S} = \{\vec{f}_1 = (3, 4)\}$;

b.) $V = W = \mathbb{R}^3$, $\tilde{S} = \{\vec{f}_1 = (1, 0, 1), \vec{f}_2 = (1, 0, -1), \vec{f}_3 = (0, 3, 4)\}$;

c.) $V = \mathbb{R}^4$ e $\tilde{S} = \{\vec{f}_1 = (1, 0, -1, 1), \vec{f}_2 = (2, 3, -1, 2)\}$.

10 Use as bases o.n.'s obtidas no Exercício 9 para escrever a projeção ortogonal $P_W\vec{x}$ de $\vec{x} \in V = \mathbb{R}^n$ sobre W nos itens (a)–(c) desse Exercício em termos das componentes de $\vec{x}$ na base canônica. Use os resultados obtidos para construir uma base o.n. S_1 do complemento ortogonal $W^\perp$ de W (ver o Exercício 7 acima) nos itens (a) e (c). (*Dica:* procure vetores $\vec{x}$ tais que $\vec{f} = \vec{x} - P_W\vec{x} \neq \vec{0}$)

11 Seja $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ munido do produto escalar dado no Exercício 4 acima. Obtenha o complemento ortogonal $W^\perp$ (ver o Exercício 7 acima) dos seguintes subespaços vetoriais $W \subset V$ abaixo:

a.) $W = \{A = [A_{ij}] \in V \mid A_{ij} = A_{ji}\}$;

b.) $W = \{A = [A_{ij}] \in V \mid A = a\mathbb{1}\}$, onde $\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a *matriz identidade*;

c.) $W = \{A \in V \mid A_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\}$.

* **12** Seja $V = \mathcal{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$, e $\langle f, g\rangle$ o produto escalar dado no Exercício 6.

a.) Seja $W = L(\{f(t) \equiv 1\})$. Encontre $W^\perp$ tal como definido no Exercício 5.

b.) Aplique ortonormalização de Gram-Schmidt à base canônica de V.

Respostas parciais dos exercícios

3 a.) Notar que se $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$, então $\omega_A(\vec{x}, \vec{y}) = x_1(A^1_1 y_1 + A^2_1 y_2) + x_2(A^1_2 y_1 + A^2_2 y_2)$.
b.) (esboço) Mostre que ω_A ser simétrico é o mesmo que exigir $A = A^T$. Notar ainda que se $\vec{x} = (x, y)$ e $A = A^T$, então $\omega_A(\vec{x}, \vec{x}) = A^1_1 x^2 + 2A^2_1 xy + A^2_2 y^2$ – use os casos particulares $\vec{x} = (1, 0), (0, 1)$ para mostrar que ω_A ser positiva definida implica $A^1_1, A^2_2 > 0$. Seja o polinômio $p(x)$ de grau ≤ 2 em x dado por $p(x) = \omega_A(\vec{x}, \vec{x})$ (y é visto aqui como uma constante) – mostre que o discriminante de $p(x)$ é dado por $\Delta = -4y^2 \det(A)$, e conclua daí que ω_A ser positiva definida implica $\det A > 0$. Conversamente, se $A^1_1, A^2_2 > 0$ e $\det(A) > 0$, mostre que $p(x) > 0$ para todo $y \neq 0$ e, caso $y = 0$, temos $p(x) = 0$ se e somente se $x = 0$.

9 a.) $S_1 = \left\{\vec{e}_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\right\}$;
b.) $S_3 = \left\{\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\right.$
$\left.\vec{e}_3 = (0, 1, 0)\right\}$;
c.) $S_2 = \left\{\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\right.$
$\left.\vec{e}_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{87}}, \sqrt{\frac{27}{29}}, \sqrt{\frac{4}{87}}, \sqrt{\frac{1}{87}}\right)\right\}$.

10 a.) $P_W(x_1, x_2) = \left(\frac{9x_1+12x_2}{25}, \frac{12x_1+16x_2}{25}\right)$, $\vec{f}_2 = (1, 0) - P_W(1, 0) = \left(\frac{16}{25}, -\frac{12}{25}\right)$, $S_1 = \left\{\vec{e}_2 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})\right\}$.

11 a.) $W = \{B = [B_{ij}] \in V \mid B_{ij} = -B_{ji}\}$;
b.) $W = \{B = [B_{ij}] \in V \mid \mathrm{Tr}(B) = 0\}$;
c.) $W = \{B = [B_{ij}] \in V \mid B_{11} = B_{22} = 0\}$.