LISTA 5 – ÁLGEBRA LINEAR – TURMA NASA

2Q'22

Prof. Pedro Lauridsen Ribeiro

Transformações lineares

Assumimos que todo espaço vetorial (real) V é imbuído de um produto escalar fixo $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$. No caso em que $V=\mathbb{R}^n\ni\vec{x}=(x_1,\dots,x_n),\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$, $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{j=1}^n x_jy_j$ é o produto escalar canônico (de modo que a base canônica de $\mathbb{R}^n$ é ortonormal – ver e.g. o Exercício 1 abaixo). Se $S=\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ é base de V, então $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)_S=\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$ é a representação de $\vec{x}\in V$ em termos de suas componentes em S – se, por exemplo, $V=\mathbb{R}^n$ e S é a base canônica, então $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)_S=(x_1,\dots,x_n)$. Dado um subespaço vetorial W de um espaço vetorial V, o *complemento ortogonal* de W é o subespaço vetorial $W^\perp=\{\vec{x}\in V\mid\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0\text{ para todo }\vec{y}\in W\}\subset V$.

Adotamos as seguntes abreviações: c.l. = "combinação linear"; l.d. = "linearmente dependente(s)"; l.i. = "linearmente independente(s)", t.l. = "transformação linear". Exercícios ou itens estrelados (*) são mais trabalhosos.

1 Mostre que a aplicação $T:V=\mathbb{R}^2\to V$ dada por $T(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,3x_1-x_2)$ é uma t.l. em V.

2 Mostre que a aplicação $T:V_1=\mathbb{R}^3\to V_2=\mathbb{R}^2$ dada por $T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2+x_3,x_2-4x_3)$ é uma t.l. de V_1 em V_2.

3 Verifique se a função $F:V_1\to V_2$ é uma t.l. do espaço vetorial V_1 no espaço vetorial V_2 nos seguintes casos:

- **a.)** $V_1=V_2=\mathbb{R}^3$, $F(x_1,x_2,x_3)=(x_2y_3-x_3y_2,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1)$, onde $(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ é um vetor fixo;
- **b.)** $V_1=\mathbb{R}^n$, $V_2=\mathbb{R}$, $F(\vec{x})=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$;
- **c.)** $V_1=M_{2\times2}(\mathbb{R})$, $V_2=M_{2\times3}(\mathbb{R})$, $F(A)=AB=C$, onde $B=[B_{ij}]$ é uma matriz 2×3 fixa, $A=[A_{ij}]$ e $AB=C=[C_{ij}]$, onde $C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}$;
- **d.)** $V_1=M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $V_2=\mathbb{R}$, $F(A)=\mathrm{Tr}\,(A)=\sum_{j=1}^n A_{jj}$ (*traço* de A), onde $A=[A_{ij}]$;
- **e.)** $V_1=V_2=M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $F(A)=A^T$ (*transposta* de A), onde $A=[A_{ij}]$, $A^T=[A_{ji}]$;
- **f.)** $V_1=M_{2\times2}(\mathbb{R})$, $V_2=\mathbb{R}$, $F(A)=3A_{11}-4A_{12}+A_{21}-A_{22}$, onde $A=[A_{ij}]$;
- **g.)** $V_1=M_{2\times2}(\mathbb{R})$, $V_2=\mathbb{R}$, $F(A)=(A_{11})^2+(A_{12})^2$, onde $A=[A_{ij}]$;
- **h.)** $V_1=V_2=F(\mathbb{R},\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, $F(f)(x)=1+f(x)$;
- **i.)** $V_1=V_2=F(\mathbb{R},\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, $F(f)(x)=f(1+x)$.

4 Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fixa, e defina a função $T:F(\mathbb{R},\mathbb{R})\to F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ como $T(f)(x)=f\circ g(x)=f(g(x))$.

a.) Prove que T é uma transformação linear;

b.) Suponha agora que g é um polinômio de grau m, e defina $T : \mathcal{P}_{\leq n}(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ como acima. Mostre que então Tf é um polinômio, e determine o maior grau que Tf pode ter.

5 Obtenha a fórmula geral da t.l. $T : V \to W$ do espaço vetorial V no espaço vetorial W dada em termos dos elementos da base S de V nos seguintes casos:

a.) $V = W = \mathbb{R}^2$, $S = \{\vec{f}_1 = (1, 1), \vec{f}_2 = (1, 0)\}$, $T\vec{f}_1 = (1, -2)$, $T\vec{f}_2 = (-4, 1)$. Expresse a resposta em termos das bases canônicas de V e W, e use a fórmula obtida para calcular $T(5, -3)$;

b.) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $S = \{\vec{f}_1 = (-2, 1), \vec{f}_2 = (1, 3)\}$, $T\vec{f}_1 = (-1, 2, 0)$, $T\vec{f}_2 = (0, -3, 5)$. Expresse a resposta em termos das bases canônicas de V e W, e use a fórmula obtida para calcular $T(2, -3)$;

c.) V=$W = \mathbb{R}^3$, $S = \{\vec{f}_1 = (1, 1, 1), \vec{f}_2 = (1, 1, 0), \vec{f}_3 = (1, 0, 0)\}$, $T\vec{f}_1 = (2, -1, 4)$, $T\vec{f}_2 = (3, 0, 1)$, $T\vec{f}_3 = (-1, 5, 1)$. Expresse a resposta em termos das bases canônicas de V e W, e use a fórmula obtida para calcular $T(2, 4, -1)$;

d.) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, $S = \{\vec{f}_1 = (1, 2, 1), \vec{f}_2 = (2, 9, 0), \vec{f}_3 = (3, 3, 4)\}$, $T\vec{f}_1 = (1, 0)$, $T\vec{f}_2 = (-1, 1)$, $T\vec{f}_3 = (0, 1)$. Expresse a resposta em termos das bases canônicas de V e W, e use a fórmula obtida para calcular $T(7, 13, 7)$.

6 Sejam $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ vetores num espaço vetorial V, e $T : V \to \mathbb{R}^3$ uma t.l. tal que $T(\vec{x}_1) = (1, -1, 2)$, $T(\vec{x}_2) = (0, 3, 2)$ e $T(\vec{x}_3) = (-3, 1, 2)$. Calcule $T(2\vec{x}_1 - 3\vec{x}_2 + 4\vec{x}_3)$.

7 Seja S uma base de um espaço vetorial V, $\dim V = n$, e $T : V \to W$ uma t.l. de V no espaço vetorial W.

a.) Mostre que se $T\vec{e} = 0$ para todo $\vec{e} \in S$, então $T = 0$;

b.) Mostre que se $W = V$ e $T\vec{e} = \vec{e}$ para todo $\vec{e} \in S$, então $T = \mathbb{1}$.

8 Sejam $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.l.'s. Obtenha a fórmula para as t.l.'s $T_1 + T_2$ e $T_1 - T_2$ no caso em que $T_1(x, y) = (2y, 3x)$ e $T_2(x, y) = (y, x)$.

9 Calcule o produto $T_2T_1 = T_2 \circ T_1$ das t.l.'s $T_1 : V \to W$, $T_2 : W \to X$, onde V, W, X são espaços vetoriais, nos seguintes casos:

a.) $V = W = X = \mathbb{R}^2$, $T_1(x, y) = (2x, 3y)$, $T_2(x, y) = (x - y, x + y)$;

b.) $V = W = X = \mathbb{R}^2$, $T_1(x, y) = (x - 3y, 0)$, $T_2(x, y) = (4x - 5y, 3x - 6y)$;

c.) $V = X = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $T_1(x, y) = (2x, -3y, x + y)$, $T_2(x, y, z) = (x - y, y + z)$;

d.) $V = X = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $T_1(x, y) = (x - y, y + z, x - z)$, $T_2(x, y, z) = (0, x + y + z)$;

e.) $V = W = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $X = \mathbb{R}$, $T_1A = A^T$, $T_2A = \operatorname{Tr} A = [A]_{11} + [A]_{22}$, onde A^T é a transposta de A (i.e. $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$).

10 Calcule o produto $T_3T_2T_1 = T_3(T_2T_1)$ das t.l.'s $T_1 : V \to W$, $T_2 : W \to X$, $T_3 : X \to Y$, onde $V = Y = \mathbb{R}^2$ e $W = X = \mathbb{R}^3$, nos seguintes casos:

a.) $T_1(x, y) = (-2y, 3x, x - 2y)$, $T_2(x, y, z) = (y, z, x)$, $T_3(x, y, z) = (x + z, y - z)$;

b.) $T_1(x, y) = (x+y, y, -x)$, $T_2(x, y, z) = (0, x+y+z, 3y)$, $T_3(x, y, z) = (3x+2y, 4z-x-3y)$.

11 Sejam V, W espaços vetoriais, e $T : V \to W$ uma t.l.. Mostre que o *núcleo* $\ker(T) = \{\vec{x} \in V \mid T\vec{x} = \vec{0}\}$ de T é subespaço vetorial de V, e a *imagem* $\operatorname{Im}(T) = \{\vec{y} \in W \mid \vec{y} = T\vec{x} \text{ para algum } \vec{x} \in V\}$ é subespaço vetorial de W. Mostre também que T é injetora se e somente se $\ker(T) = \{\vec{0}\}$.

12 Seja $T : V = \mathbb{R}^2 \to V$ a t.l. dada por $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$, correspondente a uma rotação de $\pi/2$ radianos ao redor da origem. Mostre que $\langle \vec{x}, T\vec{x} \rangle = 0$ para todo $\vec{x} \in V$.

13 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Dada uma t.l. $T : V \to W$, lembrar que a *adjunta* de T é a única t.l. $T^* : W \to V$ tal que $\langle T^*\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, T\vec{y} \rangle$ para $\vec{x}, \vec{y} \in V$ quaisquer. No caso em que $W = V$, dizemos que T é *auto-adjunta* ou *hermitiana* se $T^* = T$, e *não-negativa* se $\langle \vec{x}, T\vec{x} \rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in V$.

a.) Mostre que se $W = V$, então $\langle \vec{x}, (T - T^*)\vec{x} \rangle = 0$ para todo $\vec{x} \in V$. Conclua daí que se T é não-negativa, então $T + T^*$ também é;

b.) Dada uma t.l. $T : V \to W$ qualquer, mostre que T^*T é não-negativa;

c.) Seja $\vec{x} \in V$. Mostre que $T^*T\vec{x} = 0$ se e somente se $T\vec{x} = 0$.

14 Seja V um espaço vetorial. Uma *projeção linear* é uma t.l. $P : V \to V$ tal que $P^2 = P$.

a.) Mostre que $\mathbb{1} - P$ também é uma projeção linear;

b.) Mostre que para todo $\vec{x} \in V$ temos que $\vec{x} \in \operatorname{Im}(P)$ se e somente se $\vec{x} = P\vec{x}$ (e, portanto, $\vec{x} \in \operatorname{Im}(\mathbb{1} - P)$ se e somente se $\vec{x} = \vec{x} - P\vec{x}$);

c.) Mostre que $\ker(P) = \operatorname{Im}(\mathbb{1} - P)$ e $\operatorname{Im}(P) = \ker(\mathbb{1} - P)$;

d.) Mostre que uma projeção linear P é auto-adjunta se e somente se $\operatorname{Im}(\mathbb{1} - P) = \operatorname{Im}(P)^\perp$.

e.) Seja W outro espaço vetorial, e $T : V \to W$ uma t.l.. Se $P : V \to V$ é uma projeção linear tal que $\ker(P) = \ker(T)$, mostre que $TP = T$ e $T|_{\operatorname{Im}(P)}$ é injetora.

* **15** Sejam V, W espaços vetoriais, e $T : V \to W$ uma t.l..

a.) Uma *pseudoinversa* de T é uma t.l. $T^+ : W \to V$ tal que $TT^+T = T$. Mostre que se T^+ é uma pseudoinversa de T, então T^+T é uma projeção linear em V com $\ker(T^+T) = \ker(T)$ e TT^+ é uma projeção linear em W com $\operatorname{Im}(TT^+) = \operatorname{Im}(T)$ (ver Exercício anterior). Em particular, se T é *invertível*, então T^{-1} é a *única* pseudoinversa de T;

b.) Se T_1^+ e T_2^+ são pseudoinversas de T com $T_1^+T = T_2^+T = P$ e $TT_1^+ = TT_2^+ = Q$, mostre que $\ker(T_1^+ - T_2^+) \supset \operatorname{Im}(Q) = \operatorname{Im}(T)$ e $\operatorname{Im}(T_1^+ - T_2^+) \subset \ker(P) = \ker(T)$. Conversamente, se T_1^+ é uma pseudoinversa de T com $T_1^+T = P$, $TT_1^+ = Q$, e $T_0 : W \to V$ é uma t.l. tal que $\ker(T_0) \supset \operatorname{Im}(Q) = \operatorname{Im}(T)$ e $\operatorname{Im}(T_0) \subset \ker(P) = \ker(T)$, então $T_2^+ = T_1^+ + T_0$ também é uma pseudoinversa de T com $T_2^+T = P$ e $TT_2^+ = Q$.

c.) Sejam $P : V \to V$, $Q : W \to W$ projeções lineares tais que $\ker(P) = \ker(T)$ e $\operatorname{Im}(Q) = \operatorname{Im}(V)$. Mostre que $\widetilde{T}^+ = (T|_{\operatorname{Im}(P)})^{-1}Q$ é a *única* pseudoinversa de T tal que $\widetilde{T}^+T = P$, $T\widetilde{T}^+ = Q$ e T é uma pseudoinversa de $\widetilde{T}^+$. Conversamente, se T^+ é uma pseudoinversa de T tal que $T^+T = P$ e $TT^+ = Q$, então $\widetilde{T}^+ = T^+TT^+$. (*Dica:* use o item (e) do Exercício 14)

d.) Seja $\widetilde{T}^+$ a pseudoinversa de T obtida a partir de P, Q tais como no item (d), e suponha $T_0 : W \to V$ tal como no item (c). Se $T_0|_{\ker(Q)}$ é uma *bijeção* de $\ker(Q) = \operatorname{Im}(\mathbb{1} - Q)$ em $\ker(P) = \ker(T)$, mostre que $T^+ = \widetilde{T}^+ + T_0$ é uma pseudoinversa *invertível* de T. Em particular, pelo item (b), T *não* pode ser uma pseudoinversa de T^+ nesse caso.

* **16** Sejam V, W espaços vetoriais, $\dim(V) =$

$n < \infty$, $\dim(W) = m < \infty$, e $T : V \to W$ uma t.l. com adjunta $T^* : W \to V$.

a.) Mostre que $\ker(T^*) = \operatorname{Im}(T)^\perp$ e $\operatorname{Im}(T^*) = \ker(T)^\perp$ (*Dica:* para provar a segunda identidade, troque os papeis de T e T^* e use a projeção ortogonal ao longo de $\operatorname{Im}(T)$ para concluir que $\operatorname{Im}(T)^{\perp\perp} = \operatorname{Im}(T)$. Veja o Exercício 7 da Lista 4 para mais detalhes). Conclua daí que a restrição de T a $\operatorname{Im}(T^*)$ é injetora; (*Dica:* use o item (c) do Exercício 13 – em particular, notar que a restrição de T^*T a $\operatorname{Im}(T^*)$ também é injetora)

b.) Se $P^\perp = P_{\ker(T)}$ é a projeção ortogonal ao longo de $\ker(T)$, $P = \mathbb{1} - P^\perp$, e $Q = P_{\operatorname{Im}(T)}$ é a projeção ortogonal ao longo de $\operatorname{Im}(T)$, então mostre que $T^+ = (T|_{\operatorname{Im}(P)})^{-1}Q$ é uma pseudoinversa de T tal que $\vec{x} - T^+T\vec{x}$ é o vetor em $\ker(T)$ mais próximo de $\vec{x} \in V$ e $TT^+\vec{y}$ é o vetor em $\operatorname{Im}(T)$ mais próximo de $\vec{y} \in W$. Essa pseudoinversa é conhecida como *pseudoinversa de Moore-Penrose*.

c.) Mostre que podemos escrever a pseudoinversa de Moore-Penrose de T, obtida no item (b), como $T^+ = ((T^*T)|_{\operatorname{Im}(T^*)})^{-1}T^*$. (*Dica:* use o item (a))

* **17** Seja V um espaço vetorial, $S = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ uma base o.n. de V (de modo que $\dim(V) = n < \infty$) e $T \in V' = L(V, \mathbb{R})$, $\vec{x} \in V$ tais que $T\vec{x} \neq 0$. Mostre que a t.l.

$$P\vec{y} = \frac{T\vec{y}}{T\vec{x}}\vec{x}$$

é uma projeção linear (ver o Exercício 14 acima), e que $\vec{x} \in \ker(T)^\perp$ se e somente se $T\vec{x} = \|\vec{x}\|^2$ (*Dica:* use o *Lema de Riesz* $T\vec{x} = \langle \vec{x}_T, \vec{x} \rangle$, onde $\vec{x}_T = \sum_{j=1}^n (T\vec{e}_j)\vec{e}_j$ e $S = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ é base o.n. de V). Conclua nesse caso que $|T\vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$, com igualdade se e somente se $\vec{y} \in \ker(T)^\perp$. (*Dica:* use a desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Respostas parciais dos exercícios

3 Os itens (a), (c), (d), (e), (f) e (i) são t.l.'s. O item (b) não preserva multiplicação por escalares negativos, o item (g) não preserva multiplicação por escalares diferentes de zero ou 1, e o item (h) não preserva soma de vetores.

4 b.) O maior grau que Tf pode ter é mn.

5 a.) $\vec{x} = (x_1, x_2) = (x_2, x_1 - x_2)_S$, $T\vec{x} = x_2(1, -2) + (x_1 - x_2)(-4, 1) = (-4x_1 + 5x_2, x_1 - 3x_2)$, $T(5, -3) = (-35, 14)$;
b.) $\vec{x} = (x_1, x_2) = (\frac{-3x_1+x_2}{7}, \frac{x_1+2x_2}{7})_S$, $T\vec{x} = \frac{-3x_1+x_2}{7}(-1, 2, 0) + \frac{x_1+2x_2}{7}(0, -3, 5) = \left(\frac{3x_1-x_2}{7}, \frac{-9x_1-4x_2}{7}, \frac{5x_1+10x_2}{7}\right)$, $T(2, -3) = \left(\frac{9}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{20}{7}\right)$;
c.) $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_2)_S$, $T\vec{x} = x_3(2, -1, 4) + (x_2 - x_3)(3, 0, 1) + (x_1 - x_2)(-1, 5, 1) = (-x_1 + 4x_2 - x_3, 5x_1 - 5x_2 - x_3, x_1 + 3x_3)$, $T(2, 4, -1) = (15, -9, -1)$.

6 $T(2\vec{x}_1 - 3\vec{x}_2 + 4\vec{x}_3) = 2(1, -1, 2) - 3(0, 3, 2) + 4(-3, 1, 2) = (-10, -5, 6)$.

7 Use a definição de base.

8 $(T_1 + T_2)(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) = (3y, 4x)$, $(T_1 - T_2)(x, y) = T_1(x, y) - T_2(x, y) = (y, 2x)$.

9 a.) $T_2T_1(x, y) = (2x - 3y, 2x + 3y)$;
b.) $T_2T_1(x, y) = (4x - 12y, 3x - 9y)$;
c.) $T_2T_1(x, y) = (2x - 3y, x - 2y)$;
d.) $T_2T_1(x, y) = (0, 2x)$;
e.) $T_2T_1(A) = T_2(A) = \mathrm{Tr}A$.

10 a.) $T_3T_2T_1(x, y) = (3x - 2y, x)$;
b.) $T_3T_2T_1(x, y) = (4y, 6y)$.

14 d.) (esboço) Notar que temos que $\langle P\vec{x}, (\mathbb{1} - P)\vec{y}\rangle = 0$ para $\vec{x}, \vec{y} \in V$ quaisquer se e somente se $\langle P\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle P\vec{x}, P\vec{y}\rangle$ para $\vec{x}, \vec{y} \in V$ quaisquer. Em particular, trocando os papeis de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ e usando a simetria do produto escalar, concluímos da segunda identidade que $\langle \vec{x}, P\vec{y}\rangle = \langle P\vec{y}, \vec{x}\rangle = \langle P\vec{y}, P\vec{x}\rangle = \langle P\vec{x}, P\vec{y}\rangle = \langle P\vec{x}, \vec{y}\rangle$ para $\vec{x}, \vec{y} \in V$ quaisquer. Conversamente, se P é auto-adjunta e $\langle P\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, P\vec{y}\rangle = 0$ para todo $\vec{x} \in V$, tomando em particular $\vec{x} = P\vec{y}$ concluímos que $P\vec{y} = \vec{0}$ e portanto $\vec{y} = \vec{y} - P\vec{y}$.