Lista 6 – Álgebra Linear – Turma NASA

2Q'22

Prof. Pedro Lauridsen Ribeiro

A matriz de uma transformação linear

Assumimos que todo espaço vetorial (real) V é imbuído de um produto escalar fixo $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$. No caso em que $V=\mathbb{R}^n\ni\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_n)$, $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{j=1}^n x_jy_j$ é o produto escalar canônico (de modo que a base canônica de $\mathbb{R}^n$ é ortonormal – ver e.g. o Exercício 1 abaixo). Se $S=\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ é base de V, então $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)_S=\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$ é a representação de $\vec{x}\in V$ em termos de suas componentes em S – se, por exemplo, $V=\mathbb{R}^n$ e S é a base canônica, então $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)_S=(x_1,\ldots,x_n)$. Dado um subespaço vetorial W de um espaço vetorial V, o *complemento ortogonal* de W é o subespaço vetorial $W^\perp=\{\vec{x}\in V\mid\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0\text{ para todo }\vec{y}\in W\}\subset V$.

Adotamos as seguntes abreviações: c.l. = "combinação linear"; l.d. = "linearmente dependente(s)"; l.i. = "linearmente independente(s)", t.l. = "transformação linear". Exercícios ou itens estrelados (*) são mais trabalhosos.

1 Mostre que a matriz da t.l. $T:V\to W$ dada por $T\vec{x}=0$ em quaisquer bases $S\subset V$, $\tilde{S}\subset W$ é a matriz nula.

2 Mostre que a matriz da t.l. $T:V\to V$ dada por $T\vec{x}=\lambda\vec{x}$ em qualquer base $S\subset V$ é igual a λ vezes a matriz identidade.

3 Sejam e $V=\mathbb{R}^n$, $W=\mathbb{R}^m$, e $S\subset V$, $\tilde{S}\subset W$ as bases *canônicas*. Se A é a matriz em $S,\tilde{S}$ da transformação linear $T:V\to W$ dada pela ação $B\vec{x}_S$ de uma matriz $B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sobre o vetor-coluna $\vec{x}_S$ de $\vec{x}\in V$ na base S, mostre que $A=B$.

4 Seja $S=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}\subset V$ uma base de V, e $T:V\to V$ a t.l. dada por $T\vec{e}_1=\vec{e}_2$, $T\vec{e}_2=\vec{e}_3$, $T\vec{e}_3=\vec{e}_4$, $T\vec{e}_4=\vec{e}_1$. Calcule a matriz A de T na base S.

5 Calcule nos casos abaixo a matriz A da t.l. $T:V\to W$ nas bases $S\subset V$, $\tilde{S}\subset W$.

a.) $V_1=V_2=\mathbb{R}^2$, $S=\tilde{S}=\{(1,1),(-1,0)\}$, $T(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1+x_2)$;

b.) $V_1=\mathbb{R}^2$, $V_2=\mathbb{R}^3$, $S=\{(1,3),(-2,4)\}$, $\tilde{S}=\{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\}$, $T(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,-x_1,0)$;

c.) $V_1=V_2=\mathbb{R}^3$, $S=\tilde{S}=\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$, $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2,x_2-x_1,x_1-x_3)$.

6 Calcule nos casos abaixo (i) as matrizes A e B das respectivas transformações lineares $T_1:V\to W$, $T_2:W\to X$ nas bases $S_1\subset V$, $S_2\subset W$, $S_3\subset X$, e (ii) a matriz C da t.l. $T_2T_1=T_2\circ T_1:V\to X$ nas bases S_1,S_3. Conclua daí que $C=BA$:

a.) $V = \mathscr{P}_{\leq 1}(\mathbb{R})$, $W = X = \mathscr{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$, $S_1 = \{f_1(t) = 1, f_2(t) = t\}$, $S_2 = S_3 = \{g_1(t) = 1, g_2(t) = t, g_3(t) = t^2\}$, $(T_1 f)(t) = tf(t)$, $(T_2 g)(t) = g(2t+1)$;

b.) $V = \mathscr{P}_{\leq 1}(\mathbb{R})$, $W = \mathscr{P}_{\leq 2}(\mathbb{R})$, $X = \mathscr{P}_{\leq 3}(\mathbb{R})$, $S_1 = \{f_1(t) = 1, f_2(t) = t\}$, $S_2 = \{g_1(t) = 1, g_2(t) = t, g_3(t) = t^2\}$, $S_3 = \{h_1(t) = 1, h_2(t) = t, h_3(t) = t^2, h_4(t) = t^3\}$, $T_1(a_0 + a_1 t) = 2a_0 - 3a_1 t$, $(T_2 g)(t) = 3tg(t)$.

7 Considere a t.l. $T : V = \mathbb{R}^2 \to V$ cuja matriz A na base $\tilde{S} = \{\vec{f_1} = (1,3), \vec{f_2}(-1,4)\}$ é dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

a.) Calcule $T\vec{f_j}$, $j = 1, 2$ como c.l. de $\vec{f_1}, \vec{f_2}$;

b.) Calcule a matriz C de mudança da base *canônica* $S = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ de V para $\tilde{S}$, e sua inversa C^{-1}; (*Dica:* lembrar que C^{-1} é a matriz de mudança da base $\tilde{S}$ para a base S)

c.) Calcule a matriz B de T na base canônica; (*Dica:* lembrar que $B = CAC^{-1}$)

d.) Calcule $T\vec{e}_j$, $j = 1, 2$ como c.l. de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$;

e.) Use a fórmula obtida no item (d) para calcular $T(1,1)$.

8 Calcule nos casos abaixo (i) a matriz A da t.l. $T : V \to V$ na base $S \subset V$ e (ii) a matriz C de mudança da base *o.n.* S para a base *o.n.* $\tilde{S}$, bem como sua inversa C^{-1}. Use os dois resultados para (iii) calcular a matriz $C^{-1}AC$ de T na base $\tilde{S}$. (*Dica:* lembrar que se $S, \tilde{S}$ são o.n., então $C^{-1} = C^T$)

a.) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1,0), (0,1)\}$, $\tilde{S} = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$, $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -x_2)$;

b.) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \left\{\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right\}$, $\tilde{S} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + 7x_2, 3x_1 - 4x_2)$;

c.) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $\tilde{S} = \left\{(1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, -x_2, x_1 + 7x_3)$;

d.) $V = \mathbb{R}^2$, $S, \tilde{S}$ são as bases do item b), e $T\vec{x} = 5\vec{x}$.

Respostas parciais dos exercícios

4 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5 a.) Notando que $(1,0) = -(-1,0)$ e $(0,1) = (1,1) + (-1,0)$, temos que $T(1,1) = (0,2) = 2(1,1) + 2(-1,0)$, $T(-1,0) = (-1,-1) = -(1,1)$, logo $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

b.) Notando que $(1,0,0) = \frac{1}{3}(3,0,0)$, $(0,1,0) = \frac{1}{2}(2,2,0) - \frac{1}{3}(3,0,0)$ e $(0,0,1) = (1,1,1) + -\frac{1}{2}(2,2,0)$, temos que $T(1,3) = (7,-1,0) = -\frac{1}{2}(2,2,0) + 2(3,0,0)$, $T(-2,4) = (6,2,0) = (2,2,0) + \frac{4}{3}(3,0,0)$, logo $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

c.) Notando que $(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,1,0)$, $(0,1,0) = -\frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,1,0)$, $(0,0,1) = \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0)$, temos que $T(1,0,1) = (1,-1,0) = (1,0,1) - (0,1,1)$, $T(0,1,1) = -\frac{3}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,1,0)$, $T(1,1,0) = \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0)$, logo $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

6 a.) (i) $(T_1 f_1)(t) = t f_1(t) = t = g_2(t)$, $(T_1 f_2)(t) = t f_2(t) = t^2 = g_3(t)$, logo $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $(T_2 g_1)(t) = g_1(2t+1) = g_1(t)$, $(T_2 g_2)(t) = g_2(2t+1) = 2t+1 = g_1(t) + 2g_2(t)$, $(T_2 g_3)(t) = g_3(2t+1) = 1 + 4t + 4t^2 = g_1(t) + 4g_2(t) + 4g_3(t)$, logo $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e portanto $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; (ii) $(T_2 T_1 f_1)(t) = (2t+1) f_1(2t+1) = 2t + 1 = f_1(t) + 2f_2(t)$, $(T_2 T_1 f_2)(t) = (2t+1) f_2(2t+1) = 1 + 4t + 4t^2 = f_1(t) + 4f_2(t) + 4f_3(t)$, logo $C = BA$;

b.) (i) $(T_1 f_1)(t) = 2 = 2g_1(t)$, $(T_1 f_2)(t) = -3t = -3g_2(t)$, logo $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, e $(T_2 g_1)(t) = 3t g_1(t) = 3t = 3g_2(t)$, $(T_2 g_2)(t) = 3t g_2(t) = 3t^2 = 3g_3(t)$, $(T_2 g_3)(t) = 3t g_3(t) = 3t^3 = 3g_4(t)$, logo $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e portanto $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & -9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (ii) $(T_2 T_1 f_1)(t) = 6t = 6g_2(t)$, $(T_2 T_1 f_2)(t) = -9g_3(t)$, logo $C = BA$.

7 a.) $T(1,3) = (1,3) - 2(-1,4) = (3,-5)$, $T(-1,4) = 3(1,3) + 5(-1,4) = (-2,29)$.

b.) $(1,0) = \frac{4}{7}(1,3) - \frac{3}{7}(-1,4)$ e $(0,1) = \frac{1}{7}(1,3) + \frac{1}{7}(-1,4)$.

d.) $T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(\frac{4}{7}T(1,3) - \frac{3}{7}T(-1,4)) + y(\frac{1}{7}T(1,3) + \frac{1}{7}T(-1,4)) = \frac{4x+y}{7}T(1,3) + \frac{-3x+y}{7}T(-1,4)$.

e.) $T(1,1) = \frac{5}{7}T(1,3) - \frac{2}{7}T(-1,4) = (\frac{19}{7}, -\frac{83}{7})$.