Lista 8 – Álgebra Linear – Turma NASA

2q'22

Prof. Pedro Lauridsen Ribeiro

Determinantes, autovalores e autovetores

Adotamos as seguntes abreviações: c.l. = "combinação linear"; l.d. = "linearmente dependente(s)"; l.i. = "linearmente independente(s)", t.l. = "transformação linear". Exercícios ou itens com (*) são mais trabalhosos.

Determinantes

Dada uma t.l. $T : V \to V$ com $\dim(V) = n < \infty$, o *determinante* de T é o número real $\det(T)$ dado por

$$\det(T) = \det{}_{\hat{s}}(T\hat{s}) = \det{}_{\hat{s}}(T\vec{e}_1, \ldots, T\vec{e}_n)\ ,$$

onde $\det_{\hat{s}}$ é a *função determinante* associada à *base ordenada* $\hat{s} \in V^n$ (i.e. $\hat{s} : \{1, \ldots, n\} \to V$ é tal que $\mathrm{Im}(\hat{s}) = \hat{s}(\{1, \ldots, n\}) = S = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ é uma base de V – a *base associada a* $\hat{s}$ –, e $\hat{s}(j) = \vec{e}_j$, $j = 1, \ldots, n$). Notar que $\det(T)$ *não* depende da escolha de $\hat{s}$, ou seja, $\det(T) = \det_{\hat{s}_1}(T\hat{s}_1) = \det_{\hat{s}_2}(T\hat{s}_2)$ para quaisquer bases ordenadas $\hat{s}_1, \hat{s}_2$ de V. Em particular, se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz de T em S, i.e. $T\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n [A]_{ij}\vec{e}_i$ para todo $j = 1, \ldots, n$, então

$$\det(T) = \det(A) = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \epsilon_\sigma A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(n)n}$$

define o *determinante* $\det(A)$ de A, onde $\mathbb{S}_n = \{\tau : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid \tau \text{ bijetora}\}$ é o conjunto das *permutações* de n elementos distintos e ϵ_σ é o *sinal* de $\sigma \in \mathbb{S}_n$, ou seja,

$$\epsilon_\sigma = (-1)^{|\mathrm{inv}(\sigma)|}\ ,$$

onde $|K|$ = número de elementos do conjunto finito K e

$$\mathrm{inv}(\sigma) = \{(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \mid i < j\ ,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

é o conjunto das *inversões* de σ. Como $\epsilon_{\sigma\tau} = \epsilon_{\sigma\circ\tau} = \epsilon_\sigma\epsilon_\tau$, $\epsilon_{\mathbb{1}} = 1$ (pois $\mathrm{inv}(\mathbb{1}) = \varnothing$) e $\epsilon_{\sigma^{-1}} = \epsilon_\sigma$ (pois $\epsilon_{\sigma^{-1}}\epsilon_\sigma = \epsilon_{\sigma^{-1}\sigma} = \epsilon_{\mathbb{1}} = 1$) para $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_n$ quaisquer, temos que se σ é o produto de m *transposições*

$$\sigma = (i_1 j_1)\cdots(i_m j_m)\ , \quad (ij)(k) = \begin{cases} k & (k \neq i, j) \\ j & (k = i) \\ i & (k = j) \end{cases}\ ,$$

segue do fato que $|\mathrm{inv}((ij))| = 2|j-i|-1$ e portanto $\epsilon_{(ij)} = 1$ para $i \neq j$, $\epsilon_{(ii)} = \epsilon_{\mathbb{1}} = 1$ para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ quaisquer que $\epsilon_\sigma = (-1)^m$ se $i_l \neq j_l$ para todo $l = 1, \ldots, m$. Observar que *qualquer* $\sigma \in \mathbb{S}_n$ pode ser escrita (de maneira não-única) como um produto de transposições — o valor de ϵ_σ não depende de que maneira fazemos isso, claro. A função determinante $\det_{\hat{s}}$ associada a $\hat{s}$ é a única função determinante em V (i.e. uma função $d : V^n \to \mathbb{R}$ n-linear e anti-simétrica) que satisfaz $\det_{\hat{s}}(\hat{s}) = \det(\mathbb{1}) = 1$. Como toda função determinante $d : V^n \to \mathbb{R}$ em V satisfaz para $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V^n$ quaisquer

$$d(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \det_{\hat{s}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) d(\hat{s}) = \det_{\hat{s}}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) d(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) ,$$

inferimos daí as seguintes propriedades do determinante de A:

(i) Pela fórmula de $\det_{\hat{s}}(A)$, temos que $\det(A) = \det(A^T)$;

(ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (fórmula de Cauchy-Binet). Em particular, $\det(AB) = \det(BA)$;

(iii) Como anti-simetria de $\det_{\hat{s}}$ implica

$$\det(A) = \det_{\hat{s}}(T\vec{e}_1, \ldots, T\vec{e}_i, \ldots, T\vec{e}_j, \ldots, T\vec{e}_n) = -\det_{\hat{s}}(T\vec{e}_1, \ldots, T\vec{e}_j, \ldots, T\vec{e}_i, \ldots, T\vec{e}_n)$$

para $1 \leq i < j \leq n$ quaisquer, temos que trocar duas colunas (ou, por (i), duas linhas) de A em $\det(A)$ *troca o sinal* do valor de $\det(A)$;

(iv) A n-linearidade de $\det_{\hat{s}}$ implica que multiplicar uma coluna (ou, por (i), uma linha) de A por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ em $\det(A)$ é o mesmo que multiplicar o valor de $\det(A)$ por α. Em particular, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$;

(v) Dados $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i, j = 1 \ldots, n$, $i \neq j$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det_{\hat{s}}(T\vec{e}_1, \ldots, T\vec{e}_n) \\
&= \det_{\hat{s}}(T\vec{e}_1, \ldots, T\vec{e}_n) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \det_{\hat{s}}(T\vec{e}_1, \ldots, T\vec{e}_i, \ldots, T\vec{e}_i, \ldots, T\vec{e}_n) \\
&= \det_{\hat{s}}\left(T\vec{e}_1, \ldots, T\vec{e}_j + \sum_{\substack{i=-1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i T\vec{e}_i, \ldots, T\vec{e}_n \right) ,
\end{aligned}$$

vemos que somar a uma coluna (resp. linha) de A uma c.l. das outras colunas (resp. linhas) de A em $\det(A)$ *não muda* o valor de $\det(A)$. Em particular, $\det(A) = 0$ se uma coluna (resp. linha) for c.l. das outras colunas (resp. linhas).

Em particular, inferimos de (ii) e (iv) que A é invertível se e somente se $\det(A) \neq 0$, e nesse caso $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. Além disso, temos que $\det(C^{-1}AC) = \det(A)$ para qualquer $A, C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, C invertível. Finalmente, (ii)–(v) implicam que podemos usar *eliminação gaussiana* (ver a Lista 7 para detalhes) para calcular $\det(A)$. Mais precisamente,

$$\det(A) = \frac{\det(B)}{\det(C)} = \frac{(-1)^l}{\alpha_1 \cdots \alpha_m} \det(B) ,$$

onde:

- $B = CA =$ a matriz escalonada obtida a partir de A por eliminação gaussiana;
- $C =$ a matriz do produto das operações elementares usadas ao aplicarmos eliminação gaussiana a A;

- l = número de trocas de linhas efetuadas para chegarmos em B;

- m = número de multiplicações de linhas por escalares para chegarmos em B, e

- α_j = fator escalar pelo qual multiplicamos uma determinada linha na j-ésima operação desse tipo no algoritmo de eliminação gaussiana aplicado a A, $j = 1, \ldots, m$.

Além disso, $\det(B) = 1$ se o posto de B for igual a n (i.e. B não tem linhas nulas) e $\det(B) = 0$ se o posto de B for menor que n (i.e. B tem pelo menos uma linha nula). Essa última informação já nos permite antecipar se $\det(A) = 0$ sem a necessidade de executar eliminação gaussiana até o fim.

Autovalores e autovetores

Dada uma t.l. $T : V \to V$, dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é *autovalor* de T se existe $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que

$$T\vec{x} = \lambda\vec{x} \ .$$

Nesse caso, dizemos que $\vec{x}$ é *autovetor* de T com autovalor λ. O conjunto de autovetores de T com autovalor λ (incluindo $\vec{0}$) $\ker(A-\lambda\mathbb{1}) = (A-\lambda\mathbb{1})^{-1}(\vec{0})$ é um subespaço vetorial de V, chamado de *autoespaço* de T com autovalor λ. Analogamente, se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, dizemos que λ é autovalor de A se existe um vetor-coluna $\vec{x}_S \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ ($S = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ = base canônica de $\mathbb{R}^n$) tal que

$$A\vec{x}_S = \lambda\vec{x}_S \ .$$

No que se segue, trataremos A como uma t.l. de $V = \mathbb{R}^n$ em V agindo por multiplicação matricial à esquerda de vetores-coluna. Dizemos que T é *diagonalizável* se existe uma base S_T de *autovetores* de T, de modo que a matriz B de T em S_T é *diagonal*: $B_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Conversamente, se existe uma base de V tal que a matriz de T nessa base é diagonal, então tal base consiste em autovetores de T. Assim, dizemos que A é diagonalizável se existe uma base S_A de $\mathbb{R}^n$ tal que se C é a matriz de mudança da base canônica S para S_A, então $C^{-1}AC = B$ é diagonal. Pode-se mostrar que T é diagonalizável se e somente se T for auto-adjunta com respeito a algum produto escalar em V, e nesse caso a base de autovetores pode ser escolhida o.n. com respeito a esse mesmo produto escalar.

Como T (resp. A) possui autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se e somente se $\ker(T - \lambda\mathbb{1}) \neq \{\vec{0}\}$ (resp. $\ker(A - \lambda\mathbb{1}) \neq \{\vec{0}\}$), concluímos que λ é autovalor de T (resp. A) se e somente se $p_T(\lambda) = 0$ (resp. $p_A(\lambda) = 0$), onde $p_T(t) = \det(T - t\mathbb{1}) = p_A(t) = \det(A - t\mathbb{1}_n)$ é o *polinômio característico* de T (resp. A). Ou seja, os autovalores de T (resp. A) são precisamente as *raízes* de $p_T(t) = p_A(t)$. Notar que

$$A - t\mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} A_{11} - t & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - t & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} - t \end{bmatrix} .$$

Nesse caso, encontrar uma base de autovetores de T (resp A) para o autoespaço de T (resp A) com autovalor λ é o mesmo que encontrar uma base de soluções para o sistema linear homogêneo abaixo, denominado *equação de autovalor* de T para λ:

$$(T - \lambda\mathbb{1})\vec{x} = \vec{0} \ , \ (A - \lambda\mathbb{1}_n)\vec{x}_S = \vec{0}_S \ .$$

Fazer isso para cada um dos autovalores de T (resp. A) resulta num conjunto l.i. de autovetores de T (resp. A). Como autovetores de T (resp. A) com autovalores *distintos* são *l.i.*, concluímos que T (resp. A) é diagonalizável se e somente se a soma das dimensões $N(T-\lambda\mathbb{1}) = \dim(\ker(T-\lambda\mathbb{1}))$ (resp. $N(A-\lambda\mathbb{1}_n) = \dim(\ker(A-\lambda\mathbb{1}_n))$) dos autoespaços de T (resp. A) para *todos* os autovalores distintos λ de T (resp. A) for igual a n.

Observação: no cálculo de $p_T(t)$ por eliminação gaussiana, podemos assumir que as entradas nas matrizes envolvidas no escalonamento de $A - t\mathbb{1}_n$ que dependem de t *não se anulam*. Todavia, o escalonamento de $A - t\mathbb{1}_n$ infelizmente *não* pode ser aproveitado para a solução da equação de autovalor de T para cada autovalor λ de T, pois as operações elementares envolvidas podem diferir se alguma entrada envolvendo λ se anular. O escalonamento de $A - \lambda\mathbb{1}_n$ precisa ser feito *desde o início* para *cada* autovalor distinto λ de T.

---

1 Calcule o determinante $\det(A)$ das matrizes quadradas A dadas abaixo simplesmente explorando as propriedades de uma função determinante.

a.) $A = \begin{bmatrix} 3 & -17 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

b.) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -8 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$;

c.) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

d.) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 5 & -8 & 1 \end{bmatrix}$;

e.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

f.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

g.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2 Calcule o determinante $\det(A)$ das matrizes quadradas A dadas abaixo por eliminação gaussiana.

a.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$;

b.) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

c.) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$;

d.) $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$;

e.) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$;

f.) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

g.) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

h.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3 Use as propriedades da uma função determinante para demonstrar as fórmulas abaixo:

a.) $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = -a_{13}a_{22}a_{31}$;

b.) $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right) = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

4 Considere as t.l.'s $T : V = \mathbb{R}^n \to V$ dadas pelas matrizes A listadaas abaixo.

(i) Calcule $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1})$;

(ii) Calcule os autovalores de A = raízes de $p_A(\lambda)$;

(iii) Encontre bases para os autoespaços de A.

a.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$;

b.) $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$;

c.) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$;

d.) $A = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

e.) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

f.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

g.) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

h.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$;

i.) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$;

j.) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

k.) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

l.) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

m.) $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

5 Calcule os autovalores das matrizes quadradas A dadas abaixo simplesmente explorando as propriedades de uma função determinante.

a.) $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$;

b.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$;

c.) $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

6 Obtenha os autovalores das matrizes $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dadas abaixo e calcule a nulidade de $A - \lambda\mathbb{1}$ para cada autovalor λ. Infira a partir destes resultados em quais casos A é diagonalizável. (*Dica:* lembrar que existe uma base de autovetores de A se e somente se a soma das nulidades de $A - \lambda\mathbb{1}$ para todos os autovalores distintos λ de A for igual a n)

a.) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

b.) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;

c.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

d.) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$;

e.) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

7 Encontre a matriz C de mudança da base canônica para a base de autovetores das matrizes A dadas abaixo, e calcule $C^{-1}AC$. (*Dica:* encontre os autovalores e autovetores de A. Se o autoespaço $\ker(A - \lambda\mathbb{1})$ correspondente a um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ tiver dimensão maior que 1, encontre uma base para ele)

a.) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$;

b.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$;

c.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

d.) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Respostas parciais dos exercícios

8 **1 a.)** $\det(A) = -30$;
b.) $\det(A) = -2$;
c.) $\det(A) = 0$;
d.) $\det(A) = 0$;
e.) $\det(A) = -5$;
f.) $\det(A) = -1$;
g.) $\det(A) = 1$.

2 a.) $\det(A) = 18$;
b.) $\det(A) = 5$;
c.) $\det(A) = -13$;
d.) $\det(A) = 33$;
e.) $\det(A) = 177$;
f.) $\det(A) = 6$;
g.) $\det(A) = -\frac{1}{6}$;
h.) $\det(A) = 2$.

4 a.) (i) $p_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3)$; (ii) $\lambda = 3, -1$; (iii) $S_3 = \{(1,2)\}$, $S_{-1} = \{(0,1)\}$;
b.) (i) $p_A(\lambda) = (\lambda-4)^2$; (ii) $\lambda = 4$; (iii) $S_4 = \{(1, \frac{3}{2})\}$;
c.) (i) $p_A(\lambda) = (\lambda+\sqrt{12})(\lambda-\sqrt{12})$; (ii) $\lambda = \pm\sqrt{12}$; (iii) $S_{\sqrt{12}} = \{(1, \frac{\sqrt{12}}{3})\}$, $S_{-\sqrt{12}} = \{(1, -\frac{\sqrt{12}}{3})\}$;
d.) (i) $p_A(\lambda) = (\lambda+\sqrt{3})(\lambda-\sqrt{3})$; (ii) $\lambda = \pm\sqrt{3}$; (iii) $S_{\sqrt{3}} = \{(\sqrt{3}-2, 1)\}$, $S_{-\sqrt{3}} = \{(\sqrt{3}+2, 1)\}$;
e.) (i) $p_A(\lambda) = 0$; (ii) $\lambda = 0$; (iii) $S_0 = \{(1,0), (0,1)\}$;
f.) (i) $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$; (ii) $\lambda = 1$; (iii) $S_1 = \{(1,0), (0,1)\}$;
g.) (i) $p_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-2)$; (ii) $\lambda = 1, 2, 3$; (iii) $S_1 = \{(0,1,0)\}$, $S_2 = \{(1,-2,-2)\}$, $S_3 = \{(1,-1,-1)\}$;
h.) (i) $p_A(\lambda) = -\lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$; (ii) $\lambda = 0, \pm\sqrt{2}$; (iii) $S_0 = \{(5,1,3)\}$, $S_{\pm\sqrt{2}} = \{(1, \frac{1\mp\sqrt{2}}{15}, \frac{3\mp\sqrt{2}}{5})\}$;
i.) (i) $p_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2+\lambda+1)$; (ii) $\lambda = 2$; (iii) $S_2 = \{(1,1,3)\}$;
j.) (i) $p_A(\lambda) = -(\lambda-2)^3$; (ii) $\lambda = 2$; (iii) $S_2 = \{(1,1,3)\}$;
k.) (i) $p_A(\lambda) = -(\lambda-4)(\lambda^2-9)$; (ii) $\lambda = \pm 3, 4$; (iii) $S_3 = \{(5,-2,1)\}$, $S_{-3} = \{(-1,4,1)\}$, $S_4 = \{(6, -\frac{3}{8}, 1)\}$;
l.) (i) $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda-2)$; (ii) $\lambda = \pm 1, 2$; (iii) $S_1 = \{(2,3,1,0), (0,0,0,1)\}$, $S_{-1} = \{(-2,1,1,0)\}$, $S_2 = \{(1,4,1,0)\}$;
m.) (i) $p_A(\lambda) = (\lambda-4)^2(\lambda^2+3)$; (ii) $\lambda = 4$; (iii) $S_4 = \{(2,3,0,0)\}$.

5 a.) $\lambda = -1, 5$;
b.) $\lambda = 1, 3, 7$
c.) $\lambda = -\frac{1}{3}1, \frac{1}{2}$.

6 a.) $\lambda = 2$ e $N(A - \lambda\mathbb{1}) = 1$, logo A não é diagonalizável;
b.) $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ e $N(A-\lambda\mathbb{1}) = 1$ para ambos os autovalores, logo A é diagonalizável;
c.) $\lambda = 2, 3$ e $N(A - \lambda\mathbb{1}) = 1$ para ambos os autovalores, logo A não é diagonalizável;
d.) $\lambda = 2$ e $N(A - \lambda\mathbb{1}) = 1$, logo A não é diagonalizável;
e.) $\lambda = 2, 3$ e $N(A - \lambda\mathbb{1}) = 1$ para ambos os autovalores, logo A não é diagonalizável.

7 a.) $\lambda = 1, 2$, com respectivos autovetores $(4,5), (3,4)$;
b.) $\lambda = \pm 1$, com respectivos autovetores $(1,3), (0,1)$;
c.) $\lambda = 0, 2$; uma base do autoespaço com autovalor $\lambda = 0$ é dada por $\{(1,0,0), (0,1,-1)\}$, e $(0,1,1)$ é um autovetor com autovalor $\lambda = 2$;
d.) $\lambda = 2, 3$; $(1,0,0)$ é um autovetor com autovalor $\lambda = 2$, e uma base do autoespaço com autovalor $\lambda = 3$ é dada por $\{(2,0,-1), (0,1,0)\}$.